

# Einführung in die Relativitätstheorie

Marc Eyer

7. August 2006

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>3</b>
1.1	Weltbilder . . . . .	3
1.2	Bezugssysteme . . . . .	4
1.2.1	Beschleunigte Bezugssysteme (klassisch) . . . . .	5
1.2.2	Die Gallileitransformation . . . . .	6
1.3	Das Michelson-Morley Experiment . . . . .	8
1.3.1	Der Äther . . . . .	9
1.3.2	Das Experiment . . . . .	10
1.4	Zeitdilatation und Längenkontraktion . . . . .	12
1.5	Die Raumzeit . . . . .	15
1.5.1	Viererkoordinaten . . . . .	15
1.5.2	Weltlinien . . . . .	15
1.5.3	Ereignishorizont und Lichtkegel . . . . .	17
1.5.4	Gleichzeitigkeit . . . . .	20
1.6	Die Lorentztransformation . . . . .	22
1.6.1	Addition von Geschwindigkeiten . . . . .	26
1.7	Relativistische Dynamik . . . . .	27
1.7.1	Die bewegte Masse . . . . .	27
1.7.2	Masse und Energie . . . . .	30

<b>2</b>	<b>Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>33</b>
2.0.3	Einleitende Gedanken . . . . .	33
2.1	Die Erweiterung des Relativitätsprinzipes auf beschleunigte Systeme . . . . .	33
2.1.1	Das Äquivalenzprinzip . . . . .	34
2.1.2	Gekrümmte Räume . . . . .	40
2.1.3	Kosmologie und schwarze Löcher . . . . .	43
2.1.4	Philosophische Bemerkungen . . . . .	46
<b>A</b>	<b>Lösungen und Berechnungen</b>	<b>50</b>
A.1	Konstruktion der Relativität der Gleichzeitigkeit . . . . .	50
A.2	Herleitung der Lorentztransformation . . . . .	51
A.3	Herleitung des relativistischen Energiesatzes . . . . .	53
A.4	Lösungen . . . . .	55
A.4.1	Kapitel 1.2.1 . . . . .	55
A.4.2	Kapitel 1.3 . . . . .	55
A.4.3	Kapitel 1.4 . . . . .	55
A.4.4	Kapitel 1.5.2 . . . . .	57
A.4.5	Kapitel 1.5.3 . . . . .	58
A.4.6	Kapitel 1.7.1 . . . . .	58
A.4.7	Kapitel 1.7.2 . . . . .	59
<b>B</b>	<b>Texte</b>	<b>61</b>
B.1	Kapitel 1 aus <i>Unsere Sonne</i> von J. Gribbin [6] . . . . .	61

# Kapitel 1

## Spezielle Relativitätstheorie

### 1.1 Weltbilder

Ist die Erde eine Scheibe oder eine Kugel? Sind Quarks die kleinsten Bausteine der Materie oder ist Materie ewig weiter teilbar? Wird sich das Universum ewig ausdehnen oder wird es sich irgendwann wieder zusammenziehen und was war vor dem Urknall? Fragen, die neben der Physik die Philosophie seit Jahrtausenden beschäftigt. Erkenntnisse in den Naturwissenschaften haben in der Geschichte die Weltanschauung, die Ergründung der Gesetze der Natur immer wieder verändert. Theorien mussten revidiert werden, weil sie a priori auf Tatsachen gebaut haben, die sich als falsch erwiesen. Eine über lange Zeit gut funktionierende Theorie, die Ergebnisse von Experimenten exakt voraussagen kann, wird oft solange für *wahr* befunden, bis zwingende Gründe auftauchen, die eine Erweiterung oder komplette Erneuerung der Theorie verlangen. Wie die gleiche Datenbasis vor dem Hintergrund verschiedener Weltanschauungen interpretiert und zu total unterschiedlichen Resultaten führen kann, die mit den empirischen Daten im Einklang stehen, zeigt ein Beispiel aus einem Buch von J. Gribbin [6].



⇒ Lesen Sie den Text 1 im Anhang B.1

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde es auch für die Newton'sche Mechanik kritisch. Ausgerechnet die Theorie, die uns ermöglicht hat, die Bewegung der

Planeten vorauszubestimmen, und die während mehreren Jahrhunderten die Phänomene unseres Alltags hinreichend genau beschrieb, gelangte ins Wanken. Als man begann, Experimente mit immer kleineren und immer schnelleren Objekten zu machen, entdeckte man die Unbrauchbarkeit der klassischen Mechanik. In schwindelerregendem Tempo errichteten die Physiker anfangs des 20. Jahrhunderts zwei neue Theorien, die das Weltbild der Physik komplett auf den Kopf stellten. Die Relativitätstheorie wurde gar von Einstein mehr oder weniger im Alleingang aufgestellt. Plötzlich sollte Materie gleichzeitig Teilchen- und Welleneigenschaften zeigen, Raum und Zeit nicht mehr absolut und die Flugbahn eines Teilchens prinzipiell nicht mehr exakt bestimmbar sein. Mit den beiden revolutionären Theorien der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik entzog sich die Beschreibung der Natur auch zusehends der Anschaulichkeit. Der Zugang zur Quantentheorie erfolgt nur über mathematisch abstrakte Begriffe, die in unserem Erfahrungsalltag keine Analogien finden. Ohne Anspruch darauf, die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik vollends zu verstehen, müssen wir uns trotzdem mit deren Resultaten und Beschreibungen der Natur auseinandersetzen, wenn wir uns mit Fragen wie *Was ist Materie?*, *Was ist Raum und Zeit?*, *Ist die Welt real?* oder *Steht ein Baum auch dort, wenn wir nicht hinschauen?* auseinandersetzen wollen.

## 1.2 Bezugssysteme

Um Orte im Raum zu beschreiben, wählen wir normalerweise ein Koordinatensystem, das uns erlaubt, die Position eines beliebigen Punktes im dreidimensionalen Raum mit drei Koordinaten festzuhalten. Es gibt verschiedene Koordinatensysteme, um dies zu tun. Wir werden hierfür im Folgenden ein kartesisches Koordinatensystem wählen, ein Koordinatensystem mit drei geradlinigen Achsen  $X - Y - Z$ . In einem kartesischen Koordinatensystem können wir also Orte mit Vektoren der folgenden Art beschreiben:

$$\vec{a} = (x, y, z) \tag{1.1}$$

Wenn wir die Position eines Objektes in der oben beschriebenen Art angeben, beziehen wir uns also auf ein bestimmtes Koordinatensystem, man spricht auch etwa von einem *Bezugssystem*.

Wenn wir in der Kinematik Orte und Bewegungen betrachten und diese beschreiben, so beziehen wir uns in deren Quantifizierung immer auf ein Bezugssystem. Wenn wir die Quantifizierung von Bewegungen und Orte aus einem anderen

Bezugssystem vornehmen, erhalten wir andere Resultate. Die Umrechnung vom einen ins andere Bezugssystem nennt man *Transformation*.

Eine der grundlegenden Fragen in der Relativitätstheorie ist, ob die physikalischen Beschreibungen der Naturgesetze unabhängig von der Wahl des Bezugssystems gelten oder nicht.

Wir wollen vorläufig drei Arten von Bezugssystemen unterscheiden:

- ruhende Bezugssysteme
- geradlinig gleichförmig bewegte Bezugssysteme
- beschleunigte Bezugssysteme

### **1.2.1 Beschleunigte Bezugssysteme (klassisch)**

Wir beginnen hier mit einigen Überlegungen zu Bezugssystemen, die sich mit gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sehr kleinen Geschwindigkeiten bewegen. Wir stellen uns folgende Frage: Wenn wir in einem Tram durch die Stadt Bern fahren und wir das Koordinatensystem für die Beschreibung unserer Bewegung so wählen, dass wir (im Tram sitzend) uns immer im Ursprung des Koordinatensystems befinden, gelten dann für uns die uns bekannten physikalischen Gesetze?

#### **Gedankenexperiment**

Ein kurzes Gedankenexperiment gibt uns auf diese Frage eine Antwort: Sie sitzen also im Tram und halten ein Pendel (Schnur mit einem Massestück angehängt) in der Hand. Nun fährt das Tram eine scharfe Linkskurve. Halt! Diese Aussage ist bereits falsch. Da Sie das Koordinatensystem mit sich umhertragen und es also die Bewegungen des Trams exakt mitmacht, stellen Sie in der Beschreibung Ihrer Bewegung keine Richtungsänderung fest. Allerdings stellen Sie fest, dass das Pendel wie „durch Geisterhand“ plötzlich nach rechts ausschwenkt. Was für eine Kraft verursacht dieses Ausschwenken? Wir haben einen Erklärungsnotstand? Wir betrachten der Einfachheit halber die Situation von aussen, d.h. vom festen Erdboden aus. Von aussen erscheint die Situation klar. Sie, im Tram sitzend werden aus Ihrer geradlinigen Bahn nach links abgedrängt, beschleunigt. Die Masse des Pendels macht die Linkskurve vorerst nicht mit. Die Trägheit seiner Masse widersetzt sich der Beschleunigung. Damit die Kraft aufgewendet werden kann, um das Massestück des Pendels trotzdem in die Linkskurve mitzunehmen, wird die Schnur des Pendels ausgelenkt, bis die Kraft entlang der Schnur die Trägheit der Masse überwindet.

Offenbar treten in einem beschleunigten Bezugssystem Kräfte auf, die nicht vorhersagbar sind, wenn keine Angaben über die Bewegung des Bezugssystems vorliegen. Solche Kräfte nennt man *Scheinkräfte*. Beschleunigte Bezugssysteme eignen sich daher nicht, um Physik zu betreiben. Wir sollten unsere Koordinatensysteme so platzieren, dass sie nicht beschleunigt werden. Nichtbeschleunigte Bezugssysteme nennt man *Inertialsysteme*.

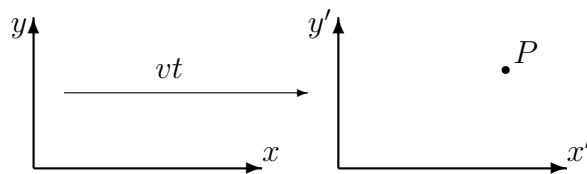


1. Sie haben folgende Begriffe kennengelernt: *Koordinatensystem, Bezugssystem, Inertialsystem, Scheinkräfte, Transformation*. Können Sie sie erklären?
2. Ist das Bezugssystem Erde ein Inertialsystem? Warum?

## 1.2.2 Die Gallileitransformation

Wir wenden uns den einfacheren Bezugssystemen zu, den Inertialsystemen. Bevor wir zur Frage schreiten, ob es auch geeignetere und ungeeignete Inertialsysteme gibt, wollen wir uns überlegen, wie man nach unserem herkömmlichen mechanischen Wissen eine Transformation durchführt.

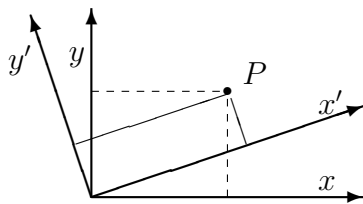
Nehmen wir an, wir befinden uns in einem zweidimensionalen Bezugssystem  $S$  mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  und wir schauen einem Bezugssystem  $S'$  zu, das sich mit nicht allzu grosser Geschwindigkeit  $v$  von uns wegbewegt. Wie gross ist dann eine im System  $S'$  gemessene Koordinate  $x'$  eines Punktes  $P$  zu einem bestimmtem Zeitpunkt  $t$  von unserem System  $S$  aus betrachtet?



Aus der Abbildung ist zu entnehmen, dass wir die Koordinaten  $x'$  und  $y'$  aus den Koordinaten  $x$  und  $y$  unseres Systems wie folgt berechnen können:

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y\end{aligned}\tag{1.2}$$

Nun können aber Bezugssysteme auch gegeneinander rotieren. Wie sieht dann die Koordinatentransformation aus.



Mit der Hilfe von etwas Trigonometrie finden wir folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta\end{aligned}\tag{1.3}$$

dabei ist  $\theta$  der Rotationswinkel. All die beschriebenen Transformationen werden *Gallileitransformationen* genannt.

Wir fassen kurz zusammen:

- Zustände physikalischer Systeme können von verschiedenen Bezugssystemen aus beschrieben werden.
- Wir haben bisher beschleunigte, geradlinig gleichförmig bewegte und ruhende Systeme beschrieben.
- In ruhenden sowie in geradlinig gleichförmig bewegten Systemen treten keine Scheinkräfte auf.
- Mit den Gallileitransformationen haben wir in der klassischen Mechanik ein Werkzeug um Koordinatentransformationen vorzunehmen.

Was wir allerdings immer noch nicht wissen ist, ob wir überhaupt irgendwie ein ruhendes von einem geradlinig gleichförmig bewegten System unterscheiden können. Mit anderen Worten: Können wir in einer verschlossenen Kiste feststellen, ob wir ruhen oder ob wir uns geradlinig gleichförmig bewegen?





- Man kann die oben aufgeworfene Frage philosophisch angehen. Versuchen Sie, auf philosophischem Weg eine Antwort auf die gestellte Frage zu begründen.
- Vergleichen Sie Resultate einiger einfacher mechanischer Experimente, die Sie einmal im Schulzimmer und einmal im Gepäckwagen eines Schnellzugs, der gerade mit möglichst konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Strecke fährt, erhalten haben (Vorschläge für Experimente: freier Fall, horizontaler Wurf, Schallgeschwindigkeitsmessung, Messen der Periodendauer eines Pendels, ...).

### 1.3 Das Michelson-Morley Experiment

Möglicherweise haben Sie bei den Resultaten der Experimente im Zug tatsächlich keine Unterschiede zu den Resultaten im Schulzimmer feststellen können. Allerdings können wir nicht davon ausgehen, dass wir damit überprüft haben, ob *alle physikalischen Phänomene* im geradlinig gleichförmig bewegten Raum den gleichen Gesetzen gehorchen wie im ruhenden, was bedeuten würde, dass wir nicht zwischen den beiden Systemen unterscheiden könnten. Überlegungen wie die im vorderen Kapitel angestellten waren für A.A. Michelson 1881 unter anderem Anlass, ein Präzisionsexperiment durchzuführen, um den Sachverhalt eindeutig zu klären. Noch eine andere Frage stand ungeklärt in der Landschaft der physikalischen Theorien. Eine Frage, deren Klärung, wie so mancher Physiker zu dieser Zeit glaubte, nur noch eine Ergänzung sei, die an der baldigen Vollendung des physikalischen Theorigebäudes aber kaum mehr rütteln würde: Wie und in was breitet sich Licht aus? Die Klärung dieser Frage hat das moderne Zeitalter der Physik eingeläutet und das physikalische Weltbild komplett erneuert. Wir wollen uns dieser Frage widmen.

### 1.3.1 Der Äther

In der Elektrodynamik haben wir gesehen, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist. Alle bisherigen Wellenphänomene, die uns in der Physik begegnet sind, waren periodische Störungen, die sich in einem Medium ausbreiteten; Schall ist eine longitudinale Druckwelle, die sich in irgendwelchem Medium fortpflanzt; Wasserwellen sind transversaler Art und pflanzen sich in Wasser fort. Und Licht? In welchem Medium pflanzt sich eine Lichtwelle fort? Zur Zeit Maxwells waren viele nahezu überzeugt, dass Licht sich im sogenannten Äther ausbreitet. Unter dem Äther stellte man sich etwas wie ein alles durchdringendes feines stoffliches Netz vor, dessen Nachweis bis dahin an der Messgenauigkeit gescheitert war. Im gleichen Zuge würde mit dem Ätherkonzept auch die uns beschäftigende Frage nach der Unterscheidung von ruhenden und geradlinig gleichförmigbewegten Systemen geklärt. Da der Äther absolut ruht, kann am *Ätherwind* (die Bewegung gegen den Äther) die absolute Geschwindigkeit festgestellt werden.

Die Idee von Michelson und Morley war nun die folgende: Die Erde kann in Bezug auf den Äther nicht in Ruhe sein. Sie bewegt sich ja einmal im Jahr um die Sonne! Die Geschwindigkeit dieser Bewegung beträgt in Bezug auf die Sonne 30 km/s und die Geschwindigkeit ändert dabei dauernd ihre Richtung. Wenn Licht nun tatsächlich den Äther als Ausbreitungsmedium benutzt und die Erde sich gegen den Äther bewegt, dann sollte es mit einem geeigneten Experiment möglich sein, in unterschiedliche Richtungen unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten zu messen.



1. Überlegen Sie sich diesen Gedankengang nochmals genau.
2. Schall breitet sich in Luft aus. Wenn man sich mit Schallgeschwindigkeit bewegt und dabei Schall erzeugt treten eigenartige Phänomene auf. Lesen Sie darüber in einem Physikbuch nach.
3. Was würde geschehen, wenn Licht sich tatsächlich gleich wie Schall ausbreitet und man sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen würde?

### 1.3.2 Das Experiment

Das Experiment von Michelson und Morley wurde mit einer Apparatur, wie in Abbildung 1.1 dargestellt, ausgeführt. Sie besteht im wesentlichen aus einer Lichtquelle A, einer halbdurchlässig versilberten Glasplatte B und zwei Spiegeln C und E. Alle Teile sind auf einer soliden Grundplatte montiert. Die Spiegel sind in gleichen Abständen  $L$  von B angeordnet. Die Platte B teilt den einfallenden Lichtstrahl. Die beiden resultierenden Lichtstrahlen wandern in Richtungen senkrecht zueinander zu den Spiegeln, von wo sie nach B zurückreflektiert werden. Beim Eintreffen in B werden die beiden Strahlen wieder vereinigt als zwei überlagerte Strahlen. Wenn die Zeit, die das Licht zum Durchlaufen der Strecke von B nach E und zurück benötigt, die gleiche ist, wie diejenige von D nach C und zurück, dann sind die überlagerten Strahlen in Phase und verstärken einander. Wenn die beiden Zeiten jedoch ein klein wenig differieren, dann sind die Strahlen ein wenig aus der Phase und interferieren. Wenn sich die Apparatur im Äther in Ruhe befindet, dann sollten die Zeiten genau gleich sein. Wenn sie sich aber mit der Geschwindigkeit  $u$  nach rechts bewegt, dann sollte eine Zeitdifferenz und damit Interferenz auftreten.

Für die Zeit, die das Licht braucht, um in Bewegungsrichtung hin und her zu laufen erhalten wir:

$$\begin{aligned}t_1 &= L/(c - u) \\t_2 &= L/(c + u) \\t_1 + t_2 &= \frac{2L/c}{1 - u^2/c^2}\end{aligned}\tag{1.4}$$

Senkrecht zur Bewegungsrichtung braucht das Licht folgende Zeit um zurückzukehren:

$$\begin{aligned}t_3 &= L/\sqrt{c^2 - u^2} \\2t_3 &= \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\end{aligned}\tag{1.5}$$

Die Laufzeiten in den beiden Richtungen sollten sich demnach um den Faktor  $\sqrt{1 - u^2/c^2}$  unterscheiden.

Das Experiment wurde präzise genug durchgeführt, um solche Abweichungen messen zu können. Die Messreihen wurden über mehrere Monate aufgenommen,

### Abbildung 1.1: Michelson-Morley-Experiment

damit man Gewähr hatte, dass die Erde auch wirklich ihre Bewegungsrichtung geändert und sich damit sicher irgendwann gegen den Äther bewegt hat. Es wurde nie eine Zeitdifferenz gefunden – es konnte keine Bewegung gegen den Äther festgestellt werden! Dieses Resultat war sehr rätselhaft und beunruhigend!

Werden die Resultate aus dem Experiment ernst genommen, folgen daraus Konsequenzen für die klassische Physik und ihre Messgrößen, die man sich zuvor nicht erträumt hätte. Einige dieser Konsequenzen seien hier aufgelistet:

- Es gibt kein absolut ruhendes Bezugssystem. Damit sind alle Inertialsysteme (nichtbeschleunigte Systeme) gleichwertig.
- Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist im Vakuum bezüglich allen Inertialsystemen gleich gross, ist also eine Naturkonstante.
- Die Werte physikalischer Messgrößen wie Länge, Zeit, Geschwindigkeit, Impuls u.a. sind vom jeweiligen Bezugssystem abhängig.

## 1.4 Zeitdilatation und Längenkontraktion

Um uns die Folgen der im vorderen Kapitel aufgezählten Konsequenzen des Michelson-Morley-Experimentes vor Augen zu führen, machen wir ein weiteres Gedankenexperiment:

### Gedankenexperiment

Wir stehen auf dem Erdboden und beobachten ein vorbeifliegendes Flugzeug. Es fliege geradlinig gleichförmig mit annähernd Lichtgeschwindigkeit. Nun stellt es plötzlich seine Scheinwerfer an. Da das Licht sich in Bezug auf unser Bezugssystem mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und das Flugzeug auch fast mit Lichtgeschwindigkeit fliegt, bewegt sich, von unserer Warte aus betrachtet, das Licht der Scheinwerfer praktisch nicht vom Flugzeug weg! Das Flugzeug fliegt dem Licht hinterher. Denken wir uns nun in das Bezugssystem des Piloten des Flugzeuges hinein. Da das Flugzeug in unserem Beispiel ein Inertialsystem darstellt, gelten auch in ihm die Naturgesetze. Somit bewegt sich auch in Bezug auf das System Flugzeug das Licht der Scheinwerferlampen mit Lichtgeschwindigkeit. Der Pilot sieht somit das Licht mit Lichtgeschwindigkeit davonfliegen. Wie sollen wir nun die Situation im Flugzeug von der Erde unten beurteilen? Für uns auf der Erde sieht es also aus, wie wenn sich der Lichtstrahl kaum vom Flugzeug entfernen würde, obwohl wir wissen, dass für den Piloten das Licht mit Lichtgeschwindigkeit wegfliegt. Es gibt zwei Möglichkeiten, wie wir die Situation erklären können. Die Geschwindigkeit des Lichtes rechnet sich aus seinem zurückgelegten Weg geteilt durch die verstrichene Zeit  $c = \Delta x / \Delta t$ . Damit wir von der Erde aus aus unseren Beobachtungen über das Bezugssystem Flugzeug den gleichen Wert für  $c$  errechnen, müssen wir entweder annehmen, dass die Zeit im Flugzeug viel langsamer läuft ( $\Delta t$  wird viel kleiner) oder dass die Strecken in Bewegungsrichtung viel kürzer gemessen werden ( $\Delta x$  wird viel grösser)!!! Es trifft beides zu!

Diese Folgerung lässt sich tatsächlich auch aus den Formeln, die wir im Experiment von Michelson-Morley gefunden haben, herauslesen. Damit wir kein Durcheinander kriegen, bezeichnen wir Bezugssysteme, in welchen wir ruhen, mit  $S$  und Systeme, welche wir „von aussen“ beurteilen mit  $S'$ .

Um von aussen die Situation im Flugzeug genau zu analysieren, bedienen wir uns der gefundenen Formeln aus dem Experiment von Michelson-Morley. Die Zeit, die beim Experiment für den Weg des Lichtes **senkrecht** zur Bewegungsrichtung gemessen wurde, entspricht der Zeit, die gemessen wird, wenn man im System ruht, da sich eben in die „vertikale“ Richtung beim Experiment nichts bewegt hat. Diese Zeit würde ein sich mit dem Experiment mitbewegter Experimentator messen.

$$\Delta t = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (1.6)$$

Die Zeit, die man für das bewegte System messen würde, entspricht der Zeit, die wir für das Licht im Experiment **parallel** zur Bewegungsrichtung errechnet haben. Dies stimmt, weil man von aussen betrachtet die Lichtgeschwindigkeit auf unser System aussen beziehen muss!

$$\Delta t' = \frac{2L/c}{1 - u^2/c^2} \quad (1.7)$$

Die beiden Gleichungen unterscheiden sich um den Faktor  $1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ . Wenn also in einem vorbeifliegenden System eine Zeitmessung durchgeführt wird ( $\Delta t$ ), so bemessen wir diesen Zeitabschnitt ( $\Delta t'$ ) um eben diesen Faktor grösser:

$$\Delta t' = \Delta t \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (1.8)$$

Diese Zeitverzögerung wird *Zeitdilatation* genannt.

Dieselbe Überlegung kann für die Länge der Strecke  $L$  im Experiment angestellt werden. Wenn die Gleichungen 1.4 und 1.5 gleich sein sollen, dann muss das  $L$  in Gleichung 1.4 um  $\sqrt{1 - u^2/c^2}$  grösser sein als das  $L$  in 1.5. Längenmessungen (von „ausser“) an bewegten Systemen fallen demnach in Bewegungsrichtung kürzer aus als in ruhenden Systemen:

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (1.9)$$

Dieses Phänomen nennt man *Längenkontraktion*.



1.  $\mu$ -Mesonen (oder auch Müonen genannt) sind Elementarteilchen, die in der Erdatmosphäre etwa 30 km über der Erdoberfläche durch die auftreffende

kosmische Strahlung entstehen. Die Teilchen haben eine sehr kurze Lebensdauer und zerfallen dann in ein Elektron und zwei weitere Teilchen. Sie bewegen sich fast mit Lichtgeschwindigkeit. In ihrem Ruhesystem haben sie eine Halbwertszeit von  $1.5 \mu\text{s}$ .

- (a) Welche Zeit benötigen die Müonen im Bezugssystem der Erde, um die Erdoberfläche zu erreichen? Nehmen sie hier an, die Teilchen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit.
  - (b) Messungen in Detektoren auf der Erde ergeben, dass gut 20 % der Müonen bis zur Erdoberfläche durchkommen. Wie können sie sich dies erklären? Nehmen sie für die Aufgabe b) und c) für die Müonen die Geschwindigkeit  $v_\mu = 0.994c$  an.
  - (c) Wie können Sie die Situation im Ruhesystem der Müonen beschreiben?
2. (a) Beschreiben Sie den Inhalt der Gleichung  $\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - u^2/c^2}$  in Worten
- (b) Wie lange erscheinen die Schienenstücke dem Lockführer im 300 km/h schnellen TGV, wenn der Gleisbauer sie genau 500 m lang gemacht hat? Benützen Sie zur Berechnung folgende mathematische Näherung:  $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ , für  $x \ll 1$ .
  - (c) Vergleichen Sie die Verkürzung der Schiene mit der Wellenlänge der gelben Spektrallinie des Natriums.
  - (d) Wie schnell müsste der Zug fahren, damit die relativistische Längenkontraktion so gross würde, wie die thermische Verkürzung der Eisenbahnschienen durch eine Abkühlung um  $0.1^\circ \text{C}$ ?



⇒ Lesen Sie aus dem Buch von G. Gamov [4] die erste Geschichte.

## 1.5 Die Raumzeit

### 1.5.1 Viererkoordinaten

Da nun offenbar Zeitangaben abhängig sind vom System, auf welches sie sich beziehen, hat Einstein vorgeschlagen, die Zeit mit dem Koordinatensystem zu verknüpfen. Ein Objekt in einem Koordinatensystem ist dann nicht nur durch die drei Ortskoordinaten, sondern auch noch durch eine Zeitangabe beschrieben. Wir sprechen dann nicht mehr von einem Objekt oder Punkt im Raum, sondern von einem *Ereignis*. Wir ergänzen also das zu beginn definierte Koordinatensystem 1.1 mit der Zeit

$$\vec{a} = (x, y, z, t) \quad (1.10)$$

Da im oben beschriebenen Vektor ungleiche Einheiten in den Komponenten vorkommen und dies zu Verwirrung führen kann, multiplizieren wir die Zeit mit einer Konstanten, nämlich der Lichtgeschwindigkeit und erhalten aus der Zeit etwas mit der Dimension einer Strecke, den sogenannten Lichtweg, den Weg, der das Licht in dieser bestimmten Zeit zurücklegt. Wir schreiben auch die vier anderen Komponenten anders, so dass wir den Vektor neu schreiben als

$$\vec{a} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (1.11)$$

wobei  $x_4 = ct$  die Zeit repräsentiert.

### 1.5.2 Weltlinien

Wir werden im Folgenden etwas anschaulicher und versuchen, unsere bisherigen Erkenntnisse in Grafiken festzuhalten und Gedanken daran weiterzuentwickeln. Wir werden dabei neue Begriffe kennenlernen.

Wir vereinfachen vorerst unser Koordinatensystem so, dass wir nur noch eine Raumdimension und die Zeitdimension betrachten. So können wir das System in Figur 1.2 grafisch darstellen. In dieser Grafik wollen wir vorerst einmal die Bewegung eines Lichtstrahles darstellen, der (in unserem eindimensionalen Ortsraum) nach rechts davonläuft. Dabei gehen wir davon aus, dass wir im Ursprung des Koordinatensystems stehen und dass die Achsen des Koordinatensystems so skaliert sind, dass das Licht in einer Zeiteinheit gerade eine Streckeneinheit zurücklegt.



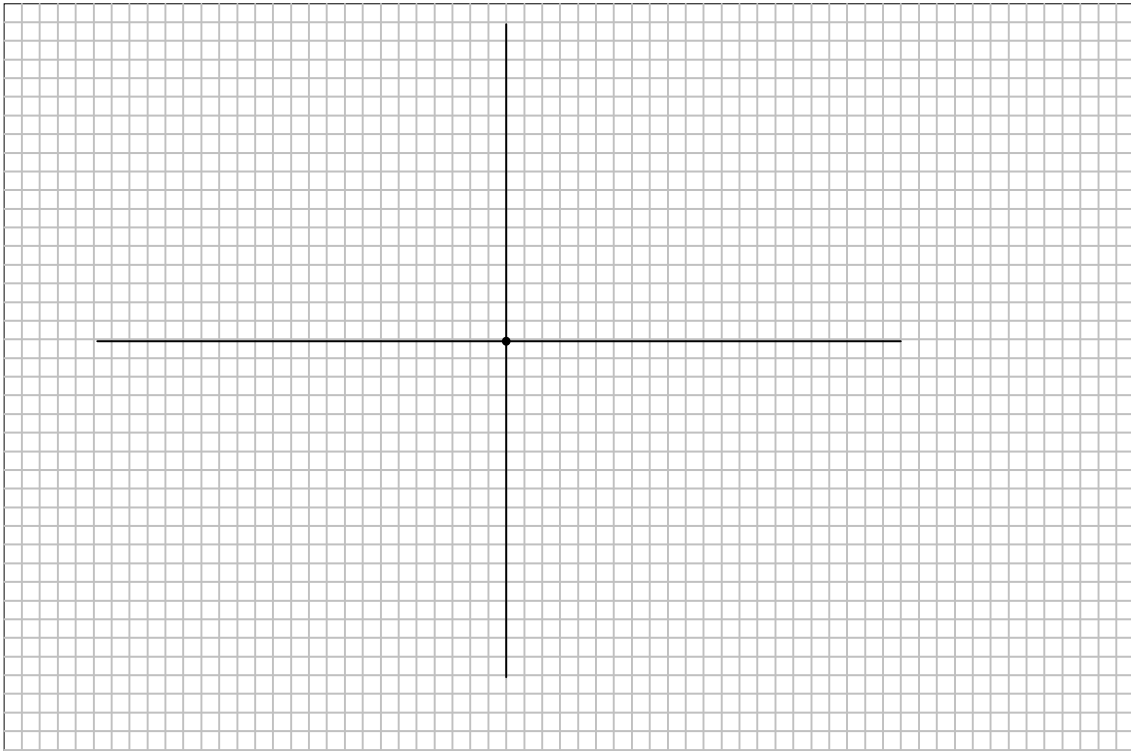


Abbildung 1.2: Licht im Raum-Zeit-Koordinatensystem

Wir sehen, dass das Licht vom Ursprung auf einer Linie in einem  $45^\circ$  Winkel zu den Achsen wegläuft. Wir können in solchen Diagrammen alle Objekte mit ihren jeweiligen Bewegungen darstellen. Die Linien, die von Objekten im Raum-Zeit-Koordinatensystem gezogen werden nennt man *Weltlinien*. Allerdings können wir bei der oben vorgenommenen Skalierung Objekte unseres Alltags, die sich mit gegenüber der Lichtgeschwindigkeit viel kleinerer Geschwindigkeit und gegenüber der Dimension Lichtjahr in viel kürzerer Distanzen bewegen, kaum darstellen. Wir denken uns deshalb in den folgenden Übungen und in der weiteren Verwendung dieser Grafiken Objekte aus, die sich mit sehr grosser Geschwindigkeit über sehr grosse Strecken bewegen.



1. Stellen Sie im folgenden Diagramm die Weltlinien folgender Objekte dar, dabei sei die Einheit der Skalierung der Achsen Lichtjahre:
  - (a) Eine Galaxy befindet sich in 5 Lj Entfernung und befindet sich Ihnen gegenüber in Ruhe.
  - (b) Ein UFO fliegt mit etwas weniger als Lichtgeschwindigkeit unmittelbar jetzt an Ihnen von rechts nach links vorbei.
  - (c) 3 Lj links von Ihnen wird in zwei Jahren eine Supernova explodieren. Zeichnen Sie den Lichtstrahl, der von der ersten Explosionswelle ausgeht. Wann sehen Sie ihn?
2. Wenn Sie sich immer im Ursprung des Koordinatensystems sehen, Sie also das Koordinatensystem immer mit sich umhertragen, dann kann man die beiden Koordinatenachsen auch als *Hier-Linie* (die Linie, auf welcher Sie sich örtlich immer aufhalten) und die *Jetzt-Linie* (die Linie, auf welcher Sie sich zeitlich immer aufhalten) bezeichnen. Welche Achse entspricht der Hier-, welche der Jetzt-Linie?
3. Wie sieht die Hier-Linie eines gegen uns bewegten Objektes aus?

Wir können nun damit beginnen, aus den Grafiken heraus Zusammenhänge herauszulesen. Wenn wir bei der oben beschriebenen Skalierung der Achsen bleiben, können wir herleiten, unter welchem Winkel  $\alpha$  zur Zeitachse wir die Weltlinie eines Objektes zeichnen müssen, wenn es sich mit gegebener Geschwindigkeit  $v$  gegen uns (das Koordinatensystem) bewegt. Zur Herleitung verwenden wir Figur 1.5.

Wir finden für  $\tan \alpha = x/y$ . Wenn wir aber für  $y$  gerade die Einheitslänge  $ct$  wählen und  $x = vt$  setzen, wird  $\tan \alpha = vt/ct$ , oder wenn  $t$  gekürzt wird

$$\tan \alpha = \frac{v}{c} \quad (1.12)$$

### 1.5.3 Ereignishorizont und Lichtkegel

Da wir die Weltlinie des Lichtes in den wie oben skalierten Grafiken kennen (immer  $45^\circ$  gegen die Zeitachse geneigt), können wir aufgrund der Beobachtung

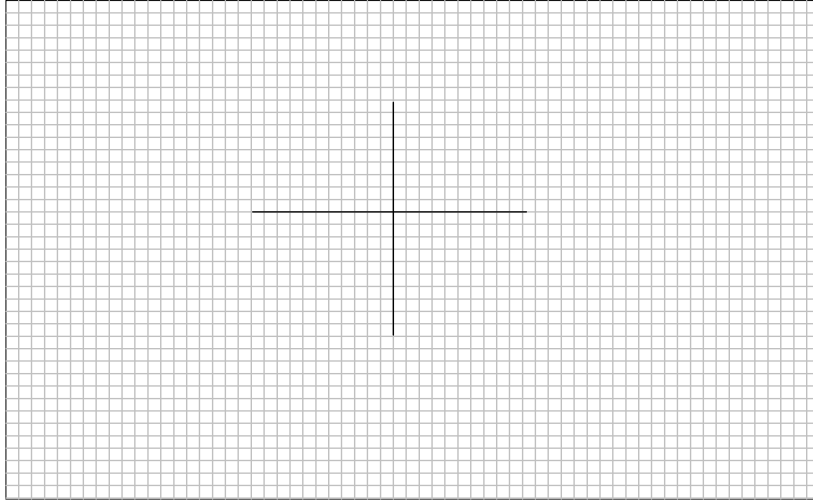


Abbildung 1.3:

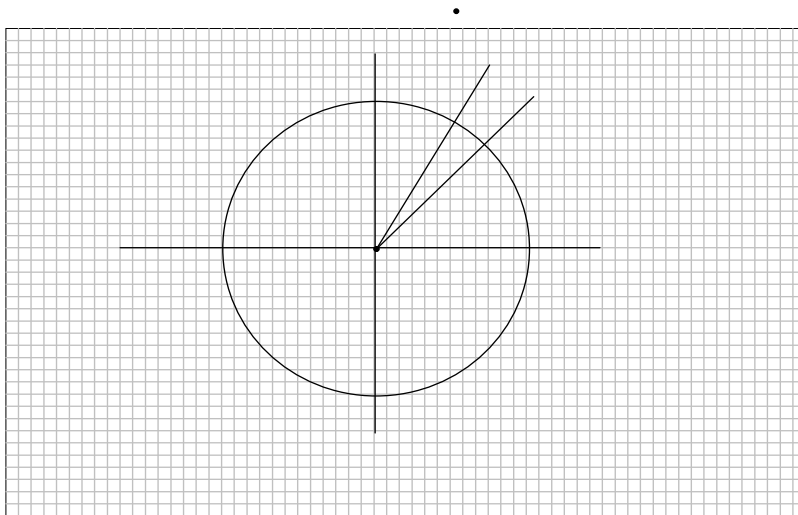


Abbildung 1.4: Die Weltlinie eines mit  $v$  bewegten Objektes

Abbildung 1.5:

von Lichtereignissen *Rückdatierungen* vornehmen. Angenommen wir sehen am Nachthimmel plötzlich eine Supernova aufleuchten. Wenn wir die Distanz zur Nova kennen, können wir aufgrund der Kenntnis der Lichtgeschwindigkeit den Zeitpunkt des Ereignisses bestimmen. Dies scheint trivial, führt uns aber zu einer neuen Überlegung.

Um einen Schritt weiter zu kommen, müssen wir hier eine Tatsache unbegründet vorwegnehmen, die uns die Relativitätstheorie lehrt, wir werden in Kapitel 1.7.1 darauf zurückkommen. Die Lichtgeschwindigkeit ist für massive Objekte eine Grenzgeschwindigkeit, die niemals erreicht werden kann. Wenn wir diese Tatsache zur Kenntnis nehmen, erhält die Lichtweltlinie in unserer Grafik eine neue Bedeutung. Sie bildet eine unüberschreitbare Grenze für die Ausbreitung von Informationen, den sogenannten *Ereignishorizont*. Der Ereignishorizont trennt in der Raumzeit Bereiche ab, von welchen wir aus der „Vergangenheit“ keine Informationen erhalten können und auf welche wir in der „Zukunft“ keinen Einfluss nehmen können. Vergangenheit und Zukunft stehen hier in Anführungsstrichen, weil wir sie gleich anders als gebraucht definieren werden: Unter der *Vergangenheit* eines Ereignisses verstehen wir den Bereich der Raumzeit, aus welchem das Ereignis beeinflusst werden kann. Die *Zukunft* des Ereignisses ist der Bereich, auf welchen das Ereignis Einfluss nehmen kann.



1. Färben Sie Ereignisse, die in der Raumzeit vom Ursprung des Koordinatensystems aus erreicht werden können gelb, die anderen schwarz.
2. Schraffieren Sie den unzugänglichen Bereich schwarz.
3. Überlegen Sie sich, welche geometrische Form der Ereignishorizont annimmt, wenn man eine zweite Ortskoordinate einführt, die senkrecht auf die Zeichenebene steht.
4. Welches Problem stellt sich, wenn Sie das mit unseren *drei* Ortskoordinaten darstellen wollen?
5. Besteht ein kausaler Zusammenhang zwischen den folgenden Ereignissen?
  - $E_1: x = 0.3\text{m}, t = 2 \cdot 10^{-9}\text{s}$
  - $E_2: x = 0.4\text{m}, t = 3 \cdot 10^{-9}\text{s}$
  - $E_3: x = 0.1\text{m}, t = 2.5 \cdot 10^{-9}\text{s}$

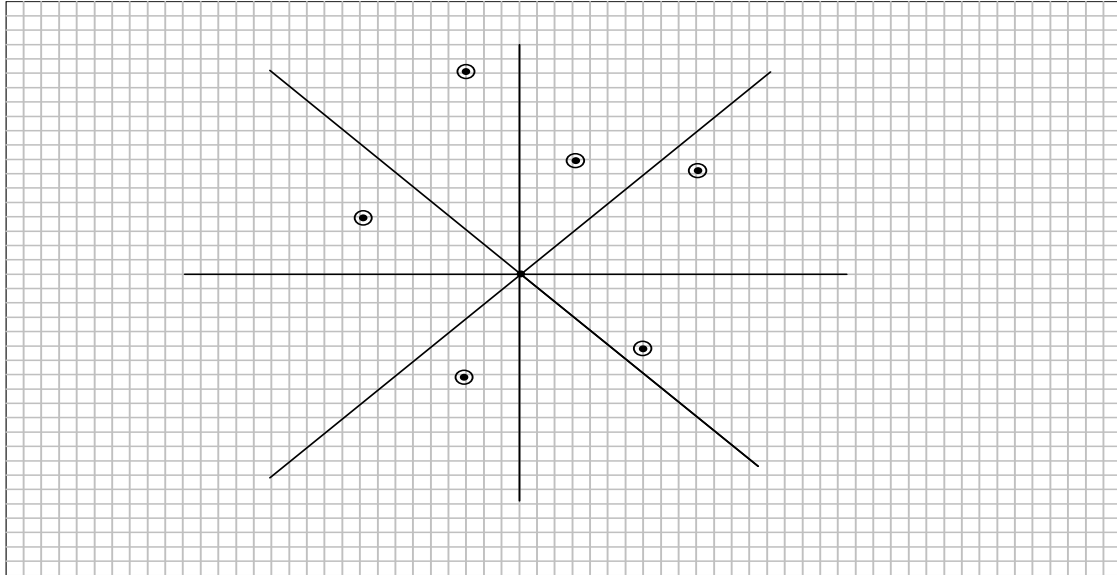


Abbildung 1.6: Der Ereignishorizont mit erreichbaren und unerreichbaren Ereignissen

### 1.5.4 Gleichzeitigkeit

Da die Zeit etwas relatives ist, kann man in der Relativitätstheorie auch nicht von absoluter Gleichzeitigkeit sprechen. Ereignen sich von uns aus betrachtet zwei Ereignisse gleichzeitig, so gilt dies für einen uns gegenüber bewegten Beobachter nicht. Wir wollen auch dies in einer Grafik analysieren.

In der Figur 1.7 ist folgende Situation dargestellt : Ein Beobachter bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v$  (sehr grosse Geschwindigkeit) gegenüber uns von links nach rechts. Beim markierten Punkt auf seiner Weltlinie sieht er gleichzeitig zwei Supernovae explodieren, die sich ihm gegenüber in Ruhe befinden. Wie er einem Astronomiebuch entnehmen kann, liegen beide Supernovae je 10 Lj entfernt, die eine links, die andere rechts von ihm. Wir konstruieren nun in der Figur 1.7 mit unserem Wissen aus unserer Warte die Lage der beiden Novae zum Zeitpunkt der Explosionen:

1. Als Vorbereitung bezeichnen wir den markierten Punkt mit  $P$ . Der Winkel zwischen der Vertikalen unseres Koordinatensystems (unserer Weltlinie)

und der des bewegten Beobachters bezeichnen wir mit  $\alpha$ .

2. In unserem Koordinatensystem (wie in jedem inertialen Koordinatensystem) schneiden die Lichtweltlinien bei geeigneter Skalierung unsere Achsen in einem  $45^\circ$ -Winkel. Wir zeichnen somit die Lichtweltlinien, die in  $P$  gleichzeitig eintreffen, sich dort also kreuzen, ein. Woher sie genau kommen wissen wir noch nicht; wir zeichnen zwei Geraden durch  $P$ , ohne Anfang und Ende.
3. Wir wissen, dass die Quellen des Lichtes gleich weit von der Weltlinie des gegen uns bewegten Beobachters entfernt liegen. Mit etwas Geometriekenntnissen erkennen wir, dass die Weltlinie des Beobachters die Mittelsenkrechte eines Dreiecks wird, das aus den Ecken Supernova 1 ( $S_1$ ), Supernova 2 ( $S_2$ ) und  $P$  besteht. Die Mittelsenkrechte teilt das Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke. Damit können wir alle nötigen Winkel und Längen für die Konstruktion bestimmen.
4. Als Vergleich zeichnen wir unser Koordinatensystem über die Konstruktion und zwar so, dass der Ursprung im Schnittpunkt der Weltlinie des Beobachters (die Mittelsenkrechte in der Konstruktion) und der Verbindungslinie der beiden Supernovae-Explosionen liegt.

Wir wollen nun die Konstruktion interpretieren. Sie können Ihre Konstruktion mit derjenigen im Anhang A.1 vergleichen.

- Die Schnittpunkte der Lichtweltlinien mit der Weltlinie unseres ruhenden Koordinatensystems sind die Zeitpunkte, zu welchen wir die Explosionen sehen. Wir sehen sie nicht gleichzeitig, weil wir uns auf die eine Supernova zu- und von der anderen wegbewegt haben.
- Aus unserer Warte haben die Supernovae aber tatsächlich auch nicht gleichzeitig stattgefunden, denn sie liegen nicht auf einer (unserer) Jetzt-Linie!
- Die Verbindungslinie der beiden Supernovae ist die Jetzt-Linie des bewegten Beobachters. Entlang dieser Linie finden für den gegen uns bewegten Beobachter Ereignisse gleichzeitig statt. Wir haben damit die beiden Koordinatenachsen des Beobachters gefunden. Seine Weltlinie ist die Zeitachse, seine Jetzt-Linie ist die Ortsachse.
- Aus der Konstruktion ist leicht abzuleiten, dass der Winkel, um den die Ortsachse des bewegten Koordinatensystems gegenüber unserem ruhenden System im Gegenuhrzeigersinn verdreht ist, gleich ist wie der Winkel, mit

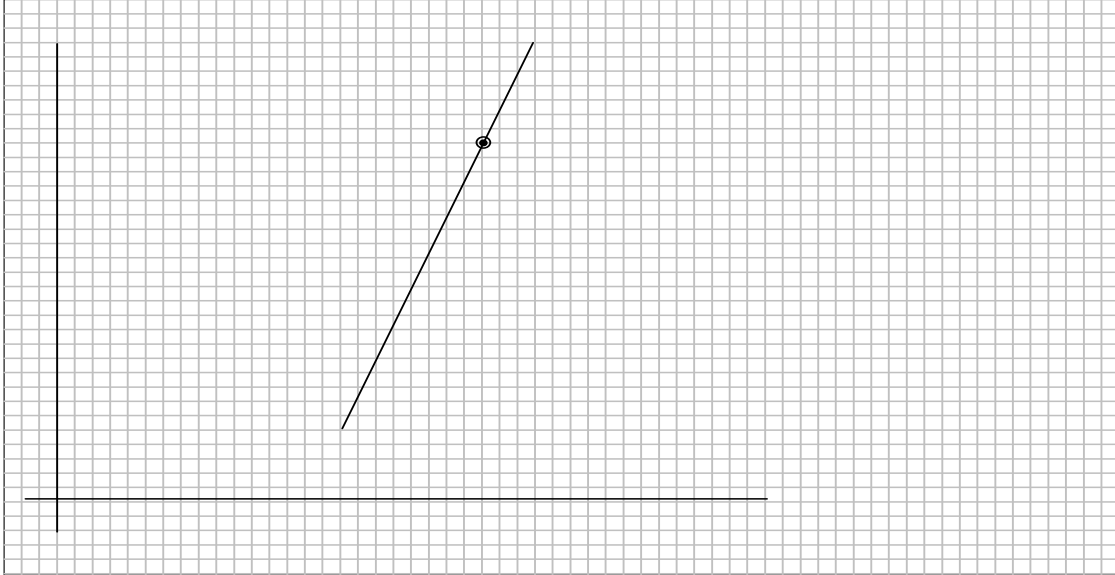


Abbildung 1.7: Die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse hängt vom Bezugssystem ab!

der die Zeitachse des bewegten Koordinatensystems gegenüber unserem im Uhrzeigersinn verdreht ist, also  $\alpha$ . Wir erinnern uns daran, dass  $\alpha = \arctan v/c$ .

## 1.6 Die Lorentztransformation

In Kapitel 1.2.2 haben wir gesehen, wie man physikalische Messgrößen von einem Koordinatensystem in ein anderes transformiert, wenn sich die Systeme nicht sehr schnell gegeneinander bewegen. Nach dem wir gesehen haben, dass die Längen- und die Zeitmessung nichts Absolutes ist, müssen wir eine neue Anweisung für die Umrechnung der Größen Ort und Zeit von einem in ein anderes System finden, das deren Relativgeschwindigkeiten berücksichtigt.

Häufig weiss der Laie nicht, dass vor Einstein sich bereits viele mit dem Thema der Relativität auseinandergesetzt haben. Das Relativitätsprinzip wurde zuerst durch Newton in einem seiner Folgesätze zu den Bewegungsgesetzen formuliert: „Die Bewegung von Körpern in einem gegebenen Raum sind untereinander

gleich, ob sich der Raum in Ruhe befindet oder ob er sich konstant auf einer Linie bewegt.“ Allerdings hat man danach lange Zeit nicht damit gerechnet, dass auch optische und elektrische Phänomene in ruhenden und gleichförmig bewegten Systemen nicht voneinander zu unterscheiden sind. Die Gleichungen, welche die Physik elektrischer und magnetischer Phänomene zusammenfasst, sind die Maxwell'schen Gleichungen. Es schien vorerst, als dass die Maxwell'schen Gleichungen für schnell bewegte Systeme nicht gelten würden, bis H. A. Lorentz die Größen Ort und Zeit in diesen Gleichungen für bewegte Systeme derart transformierte, dass die Gleichungen auch in solchen Systemen angewandt werden konnten. Einstein folgte dann dem Vorschlag des französischen Physikers Poincaré, dass alle physikalischen Gesetze von der Art sein sollten, dass sie unter der von Lorentz gemachten Transformation unverändert bleiben. Die qualitative Bedeutung und die Konsequenzen dieser Transformation, die nach Lorentz benannt wurde, legte dann aber erst Einstein in seinen 1905 erschienen Arbeiten zur speziellen Relativitätstheorie dar.

Wir zeigen hier eine mögliche Herleitung der Transformationsgleichungen. Eine andere finden Sie im Anhang A.2.

Die Transformation von Koordinaten in ein System, das sich gegenüber Lichtgeschwindigkeit nicht schnell bewegt, nennt man Galileitransformation und sieht folgendermassen aus:

$$x = x' + v \cdot t' \quad (1.13)$$

Der Ansatz für die Koordinatentransformation in schnell bewegte Systeme geht dahin, dass man die Galileitransformation mit einer Funktion multipliziert, die von der Relativgeschwindigkeit der Systeme  $v$  gegeneinander und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  abhängt. Damit ist die Transformation abhängig vom Verhältnis  $\frac{v}{c}$ .

$$x = \gamma (x' + v \cdot t') \quad (1.14)$$

mit  $\gamma = \gamma(v, c)$

Die Frage lautet nun wie  $\gamma$  (Gamma) aussieht. Aus den bisherigen Erkenntnissen erhalten wir einige Anhaltspunkte.

- Die Transformation der Koordinaten von einem System ins andere muss für zwei Systeme bis auf das Vorzeichen gleich sein, ansonsten würde sich



eines der beiden Systeme gegenüber dem anderen auszeichnen. Das heisst, wenn gilt

$$x = \gamma(x' + v \cdot t') \quad \text{dann ist} \quad x' = \gamma(x - v \cdot t) \quad (1.15)$$

- Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bezugssystem eine Konstante. Aus beiden Systemen betrachtet ist  $c$  gleich gross, also

$$\begin{array}{ccc} c = \frac{x}{t} & \text{aber auch} & c = \frac{x'}{t'} \\ & \text{und damit} & \\ x = c \cdot t & \text{und} & x' = c \cdot t' \end{array} \quad (1.16)$$

Wenn wir diese beiden Erkenntnisse kombinieren und die Beziehung aus 1.16 in Gleichung 1.15 einsetzen, erhalten wir

$$ct = \gamma(ct' + vt') \quad \text{und} \quad ct' = \gamma(ct - vt) \quad (1.17)$$

Nun können wir beide Gleichungen nach  $t$  auflösen:

$$t = \frac{\gamma t'}{c}(c + v) \quad \text{und} \quad t = \frac{ct'}{\gamma(c - v)} \quad (1.18)$$

Diese beiden Ausdrücke können wir einander gleichsetzen

$$\frac{\gamma t'}{c}(c + v) = \frac{ct'}{\gamma(c - v)} \quad (1.19)$$

und schliesslich nach  $\gamma$  auflösen!

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.20)$$

Wenn wir den Ausdruck für  $\gamma$  in die Gleichungen 1.15 einsetzen können wir schliesslich die gewünschten Zusammenhänge zwischen  $t$ ,  $t'$ ,  $x$  und  $x'$  finden:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{und} \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.21)$$

In der Umkehrung lauten sie:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{und} \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.22)$$

Diese Gleichungen sind bekannt als die *Lorentz-Transformation*. Es sei hier darauf hingewiesen, dass dies die einfachste Form der Lorentz-Transformation ist. Wenn die beiden Systeme sich nicht entlang einer gemeinsamen Koordinatenachse gegeneinander bewegen, werden die Gleichungen wesentlich komplizierter.

Wir wollen die gefundenen Gleichungen 1.22 noch etwas genauer betrachten. Wird die Ortsmessung transformiert, so tritt in der Transformation auch die Zeit auf, wird die Zeitmessung transformiert, so tritt in der Formel auch der Ort auf. Diese Verknüpfung zweier Komponenten in einer Transformation, hier  $x$  und  $t$  haben wir ganz zu Beginn des Skriptes bereits einmal angetroffen. Wird ein Koordinatensystem gegen ein anderes rotiert, so treten in den Transformationsgleichungen ebenfalls jeweils beide Komponenten  $x$  und  $y$  auf. Also ist die Lorentz-Transformation analog einer Drehung, nur ist es *eine Drehung in Raum und Zeit*, was etwas fremdartig erscheint.

Wir können aber die Analogie noch weiter treiben: Im herkömmlichen kartesischen Koordinatensystem kann man Punkte im Raum durch einen Vektor aus drei Komponenten beschreiben.

$$\vec{a} = (x, y, z) \quad (1.23)$$

Wird der selbe Punkt in einem zum ersten gedrehten Koordinatensystem dargestellt, ergibt sich ein neuer Vektor:

$$\vec{a}' = (x', y', z') \quad (1.24)$$

Die beiden Vektore haben aber eines gemeinsam: Die Drehung hat deren Betrag nicht verändert! Deren Beträge

$$|\vec{a}| = |\vec{a}'| \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (1.25)$$

sind sog. *invariant* gegenüber einer Drehung!

Nehmen wir ein Raum-Zeit-Koordinatensystem und beschreiben darin einen Punkt (oder besser ein Ereignis) mit einem Vektor, der nun bekanntlich noch eine Zeitkomponente aufweist,

$$\vec{A} = (x, y, z, ct) \quad (1.26)$$

dann gilt bei einer Lorentz-Transformation des Vektors in ein anderes Koordinatensystem dasselbe: Der Betrag des Vektors bleibt invariant gegen diese Art von

Transformation!

$$|\vec{A}| = |\vec{A}'| \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + c^2 t^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 + c^2 t'^2} \quad (1.27)$$

Dieser Zusammenhang wird im Anhang A.2 als Ansatz gewählt um die Transformationsgleichungen herzuleiten.

### 1.6.1 Addition von Geschwindigkeiten

Wir erinnern uns, dass wir anfänglich mit etwas Erstaunen die Tatsache zur Kenntnis genommen haben, dass sich Licht in jedem System, auch wenn dieses sich gegenüber einem andern noch so schnell bewegt, mit der Geschwindigkeit  $c$  fortpflanzt. Dies ist aber nur ein Spezialfall des allgemeineren Problems, dass wir im Folgenden diskutieren werden. Angenommen ein Objekt bewegt sich in einem Raumschiff mit 160'000 km/s und das Raumschiff selber bewegt sich auch mit 160'000 km/s; wie schnell bewegt sich dann das Objekt im Raumschiff von Gesichtspunkt eines ausserhalb befindlichen Beobachters? Etwa mit 320'000 km/s, was schneller als die Lichtgeschwindigkeit ist? Dies dürfte gemäss der Theorie nicht sein!

Nehmen wir an, das Objekt bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v'$  gegenüber dem Raumschiff und das Raumschiff mit der Geschwindigkeit  $u$  gegenüber dem Boden. Die angegebene Geschwindigkeit des Objektes ist die Geschwindigkeit gegenüber dem bewegten Raumschiff, daher bezeichnen wir sie mit  $v'$ . Die Geschwindigkeit des Objektes  $v$ , die wir vom ruhenden System aus messen würden, suchen wir! Im Raumschiff legt das Objekt daher in der Zeit  $t'$  die Strecke  $x'$

$$x' = v't' \quad (1.28)$$

zurück. Wir wollen aber nun die Verschiebung, die dieses Objekt in einer bestimmten Zeit macht, in Bezug auf unser ruhendes System berechnen. Dazu haben wir die Umkehrung der Lorentz-Transformation 1.22. Wir setzen in dieser Gleichung  $x' = v't'$

$$x = \frac{v't' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \text{und} \quad t = \frac{t' + u(v't')/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (1.29)$$

Um die Geschwindigkeit vom Boden aus gemessen zu erhalten, nehmen wir

das Verhältnis von  $x$  zu  $t$

$$v = \frac{x}{t} = \frac{u + v'}{1 + uv'/c^2} \quad (1.30)$$

Wir sehen, dass die resultierende Geschwindigkeit nicht einfach die Summe der Geschwindigkeit des Raumschiffes uns gegenüber und der Geschwindigkeit des Objektes dem Raumschiff gegenüber ist. Die Summe wird mit dem Faktor  $1/(1 + uv'/c^2)$  korrigiert.

## 1.7 Relativistische Dynamik

### 1.7.1 Die bewegte Masse

Wir beginnen dieses Thema erneut mit einem Gedankenexperiment:

#### Gedankenexperiment

Über einem Startturm  $S$  einer Raumstation schwebe eine Rakete, die aus zwei genau identischen Teilen  $A$  und  $B$  besteht (vgl. Figur 1.8). Zwischen beiden Teilen befinde sich eine Vorrichtung, die ohne Kontakt mit dem Startturm die beiden Teile auseinander treibt. Nachdem dieser Beschleunigungsvorgang abgeschlossen ist, haben  $A$  und  $B$ , da sie ja massegleich sind, entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten  $\pm v$ . Der Schwerpunkt des Systems liegt nach wie vor bei  $S$ .

Wie beschreibt nun ein Insasse, sagen wir des Teils  $A$ , den Vorgang? Nachdem der Beschleunigungsakt beendet ist und  $A$  wieder ein Inertialsystem darstellt (erst dann ist unsere bisherige Theorie wieder anwendbar), sieht er die Raumstation mit der Geschwindigkeit  $v$  davonfliegen. Für sein Schwesterschiff wird er aber nicht etwa die Geschwindigkeit  $2v$  messen. Dies haben wir in Kapitel 1.6.1 gezeigt. Nach der Theorie der Addition von Geschwindigkeiten misst er für sein Schwesterschiff die Geschwindigkeit

$$w = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}. \quad (1.31)$$

Diese ist also etwas kleiner als  $v$ .

Andererseits weiss der Mann in  $A$  natürlich auch, dass der Schwerpunkt des Systems  $A + B$  noch immer in  $S$  liegt, denn dass nur Wechselwirkungen zwischen  $A$  und  $B$  für die Trennung von  $S$  verantwortlich waren, ist eine objektive Tatsache von absoluter Bedeutung auch für ihn, und solche Wechselwirkungen verschieben ja den Schwerpunkt nicht. Da aber der Schwerpunkt  $S$  von  $A$  aus mehr als halb so

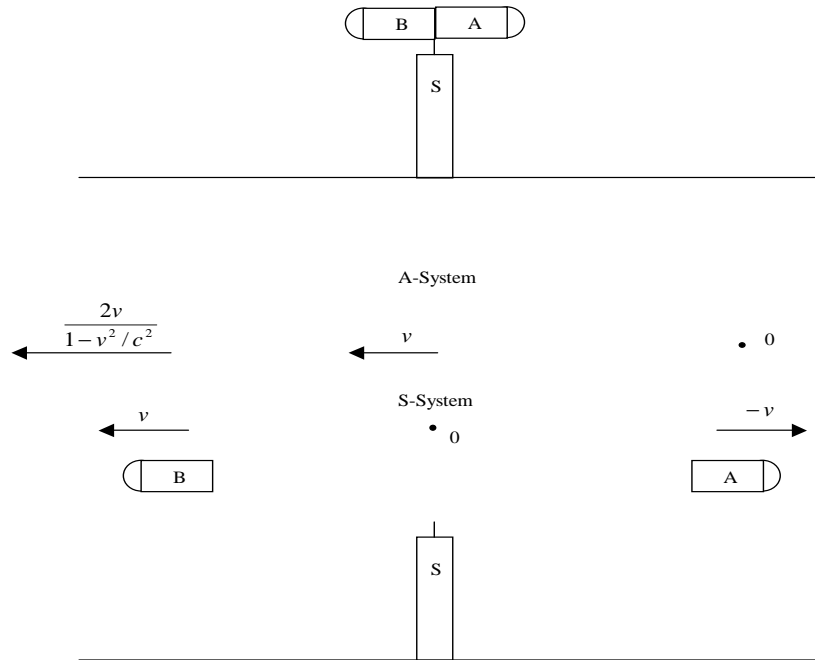


Abbildung 1.8: Der Beobachter bei  $A$  findet für die Masse von  $B$  einen höheren Wert als der Beobachter bei  $S$

schnell fliegt wie  $B$ , befindet sich  $S$  in jedem Zeitpunkt näher an  $B$  als an  $A$ . Dies ist nur möglich, wenn  $B$  jetzt nicht mehr die gleiche Masse  $m$  wie  $A$  hat, sondern eine grössere Masse  $m'$ . Wie gross ist diese Masse  $m'$ ?

Die Massen verhalten sich umgekehrt wie ihre Abstände vom Schwerpunkt  $S$ , also

$$\frac{m'}{m} = \frac{vt}{(w - v)t} = \frac{v}{\frac{2v}{1+v^2/c^2} - v} = \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}. \quad (1.32)$$

Allerdings ist es sinnvoller  $m'$  durch seine eigene Geschwindigkeit  $w$  auszudrücken, als durch die Geschwindigkeit  $v$  des Schwerpunktes. Man erhält nach einigen Um-

formungen

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (1.33)$$

Allgemein: Eine Masse, die sich in einem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt ist (in diesem Bezugssystem) um den Faktor  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  grösser, als wenn sie ruhte. Der Startturm in unserem Gedankenexperiment diente nur dazu, den Schwerpunkt materiell sinnfällig zu machen. Wenn er nicht da wäre, käme die gleiche nur durch die Relativgeschwindigkeit bestimmte Massenzunahme heraus.

Hier kommen wir nun zu einer Begründung, warum massenbehaftete Dinge nie Lichtgeschwindigkeit erreichen können: Je näher sich die Geschwindigkeit eines massiven Objektes der Lichtgeschwindigkeit nähert, desto mehr geht die Grösse seiner Masse gegen unendlich. Kurz bevor das Objekt Lichtgeschwindigkeit erreicht hat, ist die Masse des Objektes zu gross, als dass eine weitere Beschleunigung möglich wäre. Photonen, die sich von Berufs wegen mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, müssen, damit sie das können, die *Ruhemasse* 0 haben! Die Massenzunahme von Objekten wird wichtig zum Beispiel in Teilchenbeschleunigern, wenn massenreiche Elementarteilchen (Protonen, Elektronen u.a.) auf sehr hohe Geschwindigkeiten beschleunigt werden.



1. Sie richten einen Laserpointer auf eine sehr weit entfernte Wand.
  - (a) Wieweit entfernt muss die Wand sein, damit, wenn Sie sich mit dem Laserpointer in der Hand mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\omega = \pi/2$  drehen, der Lichtpunkt an der Wand sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt?
  - (b) Kann der Lichtpunkt an der Wand sich schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen? Begründung?
  - (c) Suchen sie ähnliche Beispiele.
2. Die Bahn von Satelliten, die um die Erde kreisen, muss immer wieder neu berechnet und korrigiert werden, da verschiedene kleine Effekte den Gang des Satelliten stören. U.a. übt das Licht (die Photonen) von der Sonne kommend einen *Strahlungsdruck* auf den Satelliten aus. Können Sie sich darunter etwas vorstellen? Schlagen Sie in einem Physikbuch den Begriff nach!

## 1.7.2 Masse und Energie

Wir wollen den letzten Abschnitt des vorigen Kapitels noch etwas genauer betrachten: Wir können einem Teilchen mit der Masse  $m$  einen Impuls  $p$  zuschreiben, dieser ist bekanntlich  $p = mv$ . In relativistischem Sinne müssen wir natürlich jetzt auch den Impuls unseren Überlegungen anpassen und schreiben

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.34)$$

wobei  $m_0$  die Ruhemasse ist.

Was geschieht, wenn eine Kraft lange Zeit auf eine Masse einwirkt? Sie wird beschleunigt, das heisst, sie wird schneller und schneller. Nach den Newton'schen Bewegungsgesetzen würde sie bei genügend langer Krafteinwirkung schneller als die Lichtgeschwindigkeit. In der relativistischen Mechanik ist dies unmöglich! In der Relativitätstheorie nimmt nicht die Geschwindigkeit zu, sondern der Impuls, der kontinuierlich zunehmen kann, weil die Masse zunimmt! Nach einer Weile wird praktisch keine Beschleunigung im Sinne einer Geschwindigkeitsänderung mehr vorhanden sein, aber der Impuls nimmt trotzdem weiter zu. Woher kommt nun diese „neue Masse“ bei diesem Vorgang, ist da gar der Massenerhaltungssatz verletzt? Einstein hat dazu eine Ausrede gefunden und den Massenerhaltungssatz etwas erweitert. Wir versuchen im Folgenden seine Überlegungen nachzuvollziehen:

Im vorderen Kapitel haben wir mit der Gleichung 1.33 eine Beschreibung der Massenzunahme bei bewegten Objekten gefunden. Man kann den rechten Teil der Gleichung, die die Massenzunahme beschreibt, in einer Potenzreihe entwickeln:

$$m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}v^2/c^2 + \frac{3}{8}v^4/c^4 + \dots\right) \quad (1.35)$$

Wenn  $v$  klein ist gegenüber  $c$ , machen wir einen sehr kleinen Fehler, wenn wir die höheren Glieder vernachlässigen, und wir können schreiben

$$m \cong m_0\left(1 + \frac{1}{2}v^2/c^2\right) = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad (1.36)$$

Wenn wir etwas genauer hinschauen, erkennen wir in der rechten Seite der Gleichung 1.36 die kinetische Energie im altmodischen Newton'schen Sinn. Wir können also auch sagen, die Massenzunahme sei gleich der Zunahme der kinetischen Energie geteilt durch  $c^2$ .

Die hier beschriebene Beobachtung führte Einstein zur Vermutung, dass die Masse eines Körpers einfacher ausgedrückt werden kann, wenn wir sagen, dass die Masse gleich dem gesamten Energiegehalt geteilt durch  $c^2$  sei. Multiplizieren wir Gleichung 1.36 mit  $c^2$  erhalten wir

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \dots \quad (1.37)$$

Hierbei stellt das Glied der linken Seite die gesamte Energie eines Körpers dar, und wir erkennen als letztes Glied die normale kinetische Energie. Einstein interpretierte das grosse konstante Glied  $m_0c^2$  als einen Teil der gesamten Energie des Körpers, als eine innere Energie, bekannt als die *Ruheenergie*. Die kinetische Energie kann also auch geschrieben werden als die totale Energie minus die Ruhemasse mal  $c^2$ .

$$\begin{aligned} E_{kin} &= E - m_0c^2 \\ &= m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Die aus diesen Überlegungen stammende berühmt gewordene Formel

$$E = mc^2 \quad (1.39)$$

verknüpft also Energie und Masse. Damit werden auch die Energie- und die Massenerhaltung miteinander verknüpft. Masse ist also auch Energie und Energie ist auch Masse oder besser *Energie besitzt Trägheit!*

In der Praxis ist man häufig noch an einem weitem Zusammenhang interessiert: am Zusammenhang zwischen Energie, Impuls und der Ruhemasse. Wenn wir die Gleichungen 1.34 und 1.38 zusammenfassen erhalten wir

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + c^2p^2} \quad (1.40)$$

Diese Beziehung wird als *relativistischer Energiesatz* bezeichnet. Die detaillierte Herleitung dieser Gleichung kann im Anhang ?? nachgelesen werden.





1. Am Zentrum, das 1953 vom *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (CERN)* bei Genf gegründet worden ist, forscht man längst nicht mehr im Bereich der Atomkerne. Deshalb heisst die Einrichtung heute *Laboratoire européen de physique des particules*. Längst ist auch der Aufbau der Hadronen ( $p^+$  und  $n$ ) aus Quarks unumstritten. Der *Large Hadron Collider (LHC)* dient dazu, derart energiereiche Protonen aufeinander prallen zu lassen, dass Scharen (Jets) von Teilchen entstehen. Hier ist die Relativitätstheorie alltäglich
  - (a) Informieren Sie sich beim CERN (übrigens dem Ursprung des Internets), über den LHC: [www.cern.ch](http://www.cern.ch). Weshalb ist für die Erzeugung der Jets eine möglichst grosse Gesamtenergie wichtig?
  - (b) Beim Eintritt in den LHC sind Protonen durch den Injektor auf eine Geschwindigkeit von  $0.999998c$  gebracht worden. Wie gross ist ihr Impuls? Auf das Wievielfache ist ihre Masse gestiegen?
  - (c) Wie gross ist die Gesamtenergie nach dem Injektor?
  - (d) Schätzen Sie die Energie der Protonen nach Durchlaufen des LHC ab: Sie werden durch Magnete mit der Feldstärke 8.3 T auf Kreisbahnstücken von 2.8 km Radius geführt.  
Hinweis:  $mv^2/r = qvB \rightarrow mv = p = qBr$ . Diese Gleichung ist auch relativistisch korrekt.
  
2. Die Solarkonstante  $S_0$  beträgt ca.  $1.4 \text{ kW/m}^2$ , das heisst, dass  $1 \text{ m}^2$  Fläche auf der Erde bei senkrechter Sonneneinstrahlung die Leistung  $1.4 \text{ kW}$  empfängt.
  - (a) Mit welcher Leistung strahlt die Sonne insgesamt nach allen Richtungen ab?
  - (b) Berechnen Sie die Abnahme der Sonnenmasse in einer Sekunde.
  - (c) Wieviel Prozent ihrer Masse hat die Sonne seit sie besteht in Form von Energie verloren?
  
3. In der Bildröhre eines Fernsehers werden die Elektronen auf Geschwindigkeiten gebracht, bei denen die Relativitätstheorie eine Rolle spielt. Typisch ist eine Beschleunigungsspannung von 20 kV. Berechnen Sie die kinetische Energie, die Gesamtenergie und den Impuls dieser Elektronen. Vergleichen Sie die reale Geschwindigkeit mit derjenigen, die die klassische Physik liefert.

# Kapitel 2

## Allgemeine Relativitätstheorie

### 2.0.3 Einleitende Gedanken

Während die spezielle Relativitätstheorie mit der Steigerung der in Laboratorien benützten Geschwindigkeiten für die Atom-, Kern- und Elementarteilchenforschung ein unentbehrliches Hilfsmittel geworden ist, beschränkt sich das Anwendungsgebiet der allgemeinen Relativitätstheorie auf kosmologische Fragen, trägt aber fundamental zum Verständnis der Natur und deren Eigenschaften bei.

Die Allgemeine Relativitätstheorie, kurz ART, ist eine konsequente Weiterführung der Gedanken, die zur speziellen Relativitätstheorie geführt haben. Sie wendet das Prinzip der Relativität auch auf beschleunigte Systeme an und bringt die Absolutheit von Bewegungen wie der Rotation durch eine Anpassung der Rahmenbedingung für die Beschreibung von Systemen, der Geometrie, zu fall. Um dies zu erreichen bedient sich die ART einer komplizierten Mathematik, der Tensorrechnung, die wir uns ersparen wollen. Wir werden also hier qualitativ versuchen die Ideen und Ansätze der ART nachzuvollziehen.

### 2.1 Die Erweiterung des Relativitätsprinzipes auf beschleunigte Systeme

Aus dem Experiment von Michelson und Morley folgt, dass es kein Mittel gibt festzustellen, ob und mit welcher gleichförmigen Geschwindigkeit man sich bewegt. Daraus folgen alle im ersten Kapitel besprochenen Konsequenzen, wie etwa die Zeitdilatation, die Längenkontraktion oder das Additionstheorem für Ge-

schwindigkeiten. In diesem ersten Kapitel haben wir nur über gleichförmig bewegte Systeme gesprochen und haben beschleunigte Systeme ausgeklammert. Wir haben bisher darüber geschwiegen, ob denn eine Rotation, die eine beschleunigte Bewegung ist, nicht doch eine absolute Bewegung darstellt. Wir können nämlich, wenn wir uns beschleunigt bewegen, problemlos feststellen, dass wir das tun. Es treten zum Beispiel Fliehkräfte auf, die uns spüren lassen, dass wir in eine Richtung beschleunigt werden.

Wenn trotz beschleunigter Bewegung wir auf unserer sturen Position verharren und behaupten, dass wenn wir auf einem Karussell uns im Kreise drehen, wir auch behaupten könnten, nicht das Karussell drehe sich sondern die Welt (d.h. alle Massen des Universums) drehe sich um uns, was folgen dann daraus für Konsequenzen? Die Kraft, die wir auf dem Karussell sitzend als Fliehkraft erleben, rührte dann von der Bewegung der Massen um uns herum her; eine Vorstellung, die schwierig ist. Was geschieht, wenn wir das Pferd, um welches wir uns klammern, loslassen? Wir fliegen tangential zur Kreisbewegung fort. Oder eben, das Karussell fliegt tangential zur Bewegung, die es um uns herum gemacht hat, weg.

Ein anderes Beispiel: Der Hammer, der vom Hammerwerfer auf einer Kreisbahn gehalten wird, erfährt dadurch eine Zentripetalkraft. Am Hammerwerfer zieht aber dieselbe Kraft. Wer dreht sich nun um wen?

Ein drittes Beispiel führt uns zu tiefgründigen Zusammenhängen: Angenommen, wir fallen aus einer Höhe von 300 km in einer geschlossenen Kiste im freien Fall auf die Erde zu, und dies ohne störenden Luftwiderstand. Von der beschleunigten Bewegung die wir vollziehen, spüren wir vorläufig nichts, wir sind einfach schwerelos. Kurz vor dem Aufprall ziehen wir den Fallschirm, gondeln auf die Erde, steigen aus und stellen uns neben die Kiste. Wir sind jetzt nicht mehr schwerelos, wir spüren die Erdbeschleunigung, die uns gegen das Erdzentrum hin beschleunigt. Ist die Gravitationskraft etwas Absolutes?

In der ART geht es immer noch um die Fragen: Sind wir frei in der Wahl des Bezugssystems? Auch, wenn es ein beschleunigtes ist? Gelten auch in beschleunigten Systemen die Naturgesetze, wie wir sie kennen?

### **2.1.1 Das Äquivalenzprinzip**

Auf den ersten Blick scheint die Antwort auf die oben gestellten Fragen klar. (Wir sind darauf übrigens zu Beginn des ersten Kapitels schon etwas eingegangen). In beschleunigten Bezugssystemen treten Scheinkräfte auf, Pendel werden wie durch Geisterhand ausgelenkt, Kräfte, die nur auftauchen, wenn wir uns beschleunigt

bewegen. Die Physik in beschleunigten Bezugssystemen scheint eine andere, als in Inertialsystemen. Die Fragen sind damit aber nicht befriedigend beantwortet, wir wollen uns die Sache genauer überlegen.

Wie üblich beginnen wir mit einer Situation, die wir uns vorstellen:

#### Abbildung 2.1: Gleichförmig beschleunigtes Bezugssystem

Angenommen es gibt ein Zimmer, weit weg von irgendwelcher Materie. Wir stehen aussen am Zimmer im Inertialsystem  $R$ . Im Zimmer steht ein Beobachter  $O'$ . Sein Bezugssystem ist das Zimmer  $R'$ , das sich uns gegenüber mit der konstanten Beschleunigung  $\vec{a}$  bewegt. Im Zimmer befinden sich eine Kugel, eine Taschenlampe und ein Federpendel, das an der Decke befestigt ist. Wir überlegen uns nun, was der Beobachter  $O'$  in seinem Zimmer beobachtet und was für Schlüsse er daraus zieht.

- In seinem Zimmer sieht er die Flugbahn der Kugel als beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung  $\vec{a}'$  (Parabel).
- Auch der Weg des Lichtes beschreibt eine Parabel.
- Er sieht das Federpendel mit einer Kraft  $\vec{F}$  ausgelenkt, die einer Kraft mit dem Betrag  $F = m \cdot a'$  entspricht.
- Er selber ist „schwer“, wie wenn er sich in einem Schwerfeld mit dem Betrag  $\vec{a}'$  befinden würde.

Was kann er daraus für Schlussfolgerungen ziehen. Er kann, vorausgesetzt dass er keine Möglichkeit hat nach aussen Kontakt aufzunehmen, nicht unterscheiden, ob die beobachteten Beschleunigungen durch ein Schwerfeld oder durch die Beschleunigung seines Bezugssystems verursacht werden. Folgende Schlussfolgerungen sind also nicht zu unterscheiden.

1. Das Zimmer befindet sich in einem Schwerfeld mit dem Betrag  $\vec{g}' = \vec{a}'$ .
2. Das Zimmer ist weit weg von gravitativen Einflüssen und bewegt sich gegen das Inertialsystem  $R$  mit der Beschleunigung  $\vec{a} = -\vec{a}'$
3. Die Beschleunigungen im Zimmer sind durch eine beschleunigte Bewegung *und* durch ein externes Gravitationsfeld verursacht, die sich zu den beobachteten Effekten überlagern.

Den oben aufgeführten Schlussfolgerungen liegt eine Annahme zugrunde, der wir Beachtung schenken müssen. Offenbar sind die beiden Wirkungen, mit der eine Masse auf ihre Umgebung einwirkt, *die Schwere* und *die Trägheit* nicht voneinander zu unterscheiden. Die Kraft, die nötig ist um ein Massestück in einem Schwerfeld mit dem Beschleunigungsbetrag  $b$  in Ruhe zu halten und die Kraft, die nötig ist ausserhalb eines Schwerfeldes ein Massestück mit der Beschleunigung vom Betrag  $b$  zu bewegen, ist dieselbe. Diese Annahme lässt sich theoretisch nicht begründen und muss experimentell gezeigt werden. Solche Experimente haben im letzten Jahrhundert mit immer besserer Genauigkeit gezeigt, dass das Verhältnis von schwerer zu träger Masse  $\frac{m_s}{m_t} = 1$  ergibt und damit die Annahme bestätigt. Heute wird davon ausgegangen, dass dies eine naturgegebene Tatsache ist. Sie wird *Äquivalenzprinzip* genannt. Die ART baut auf diesem Prinzip auf. Sie geht davon aus, dass man nicht unterscheiden kann, ob ein System beschleunigt wird oder ob es sich in einem Schwerfeld befindet.

Wenn wir nun vor diesem Hintergrund an unserem Gedankenexperiment weiterdenken, ergeben sich neuartige Zusammenhänge. Im beschleunigten System beschreibt ein Lichtstrahl in Bezug auf das System eine Parabel, wird aus seiner geradlinigen Bahn abgelenkt. Er muss dies den obigen Überlegungen entsprechend also auch im Schwerfeld tun. Einstein behauptete dies in seinen 1910 publizierten Arbeiten zur ART. Einige Jahre später konnten Forscher anlässlich einer totalen Sonnenfinsternis in Afrika einen Stern beobachten, der zum Zeitpunkt der Finsternis genau hinter der Sonne stehen sollte. Sie konnten ihn aber am Rand der Sonne vorbeischießen sehen. Einstein sah damit seine Theorie bestätigt. Das Licht des Sterns hinter der Sonne wurde aus seiner geradlinigen Bahn vom Schwerfeld der Sonne abgelenkt und in Richtung Erde geworfen worden.

Abbildung 2.2: Ablenkung des Lichtes eines Sterns durch das Gravitationsfeld der Sonne

Wir wollen nun noch ein zweites beschleunigtes System betrachten, unser anfänglich angesprochenes Karussell. Ein Karussell ist vereinfacht gesprochen eine gleichförmig rotierende Kreisscheibe. Setzen wir uns auf diese Kreisscheibe, so haben wir nahe am Zentrum der Rotation die kleinere Bahngeschwindigkeit als aussen. Es gilt

$$v = \omega r \tag{2.1}$$

wobei  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Da die Geschwindigkeit vom Radius abhängt, hängt auch die Beschleunigung vom Radius ab.

$$a = \omega^2 r \quad (2.2)$$

Aussen am herschen grössere Beschleunigungen, als gegen das Zentrum hin. Die Zentripedalkraft verhält sich genau gleich, da  $F = ma$ .

$$F_z = m\omega^2 r \quad (2.3)$$

Sie nimmt also auch mit kleiner werdendem Radius ab. Die veränderliche Zentripedalkraft führt dazu, dass wir, um die Arbeit zu berechnen, die wir brauchen um von der Peripherie ins Zentrum zu gelangen, ein Integral ausführen müssen. Allerdings ein sehr einfaches, da die Kraft gegen das Zentrum hin linear abnimmt. Um die Arbeit  $W = F \cdot s$  zu berechnen, kann deshalb für  $F$  die durchschnittliche Kraft bei halbem Radius eingesetzt werden. Damit wird die Arbeit zu

$$W = \frac{m\omega^2 r^2}{2} \quad (2.4)$$

Aus Gründen, die unten ersichtlich werden interessiert uns der Zusammenhang zwischen der Arbeit  $W$  und der Bahngeschwindigkeit  $v$ . Wenn wir die Beziehung aus Gleichung 2.1 in die Gleichung 2.4 einsetzen erhalten wir

$$W = \frac{mv^2}{2} \quad (2.5)$$

Diese Arbeit kann auch als potentielle Energie im Zentrum in Bezug auf die Peripherie angesehen werden. Nach  $v^2$  aufgelöst ergibt sich aus dieser Gleichung

$$v^2 = \frac{2W}{m} \quad (2.6)$$

Wir betrachten nun zwei Uhren, die eine im Zentrum des Karussells und die andere an dessen Peripherie. Diejenige aussen hat eine höhere Bahngeschwindigkeit, als diejenige innen. Gemäss der Speziellen Relativitätstheorie läuft also die aussen gegenüber der innen verlangsamt. Man könnte auch sagen, grössere Beschleunigung, langsamere Uhren. Wenn wir dies wiederum auf das Schwerfeld übertragen, in dem ja daselbe wie in einem beschleunigten System gelten muss, laufen also auch in einem Schwerfeld die Uhren langsamer. Wir wollen kurz überschlagen, wieviel das ist.

Die Spezielle Relativitätstheorie lehrt uns, dass der Faktor der Zeitdilatation der folgende ist:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.7)$$

Man kann diesen Ausdruck mit einer Potenzreihe annähern:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots \quad (2.8)$$

Wenn  $v$  kleiner als  $c$  ist gehen die höheren Terme schnell gegen null und können vernachlässigt werden. Wir erhalten

$$1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad (2.9)$$

Setzen wir für  $v^2$  die Lösung aus Gleichung 2.6 ein, erhalten wir für den Faktor

$$1 + \frac{W}{mc^2} \quad (2.10)$$

oder die ganze genäherte Formel für die Zeitdilatation:

$$\Delta t' = \Delta t \left(1 + \frac{W}{mc^2}\right) \quad (2.11)$$

Ob wir die oben angestellten Überlegungen für ein beschleunigtes System oder für ein Schwerfeld machen spielt scheinbar keine Rolle. Das  $W$  in der obigen Gleichung könnte also auch eine potentielle Energie in einem Schwerfeld sein. Wählen wir ein Beispiel:

Uns interessiert, um welchen Faktor eine Uhr unten am Eiffelturm langsamer läuft als oben. Der Eiffelturm hat eine Höhe von 318 m. Das ergibt genähert einen Potentialunterschied von  $m \cdot g \cdot h$ . Setzen wir das in der Formel 2.11 ein erhalten wir den Faktor

$$1 + \frac{mgh}{mc^2} = 1 + \frac{gh}{c^2} = 1.00000000000000345 \quad (2.12)$$

Um diesen Faktor läuft die Uhr unten am Eiffelturm gegenüber derjenigen oben langsamer. Dies ist natürlich lächerlich. Anders ist es, wenn wir eine Uhr auf der Erde mit einer Uhr am Rande eines schwarzen Lochs vergleichen, wo die Schwerebeschleunigung enorme Werte annimmt.

Analoge Überlegungen können für die Längenmessung gemacht werden und man findet, dass in beschleunigten Systemen auch eine Längenkontraktion stattfindet.

Wir fassen folgendes Zusammen:



- Die Existenz eines Schwerfeldes ruft Zeitdilatation und Längenkontraktion hervor.
- Dasselbe gilt für beschleunigte Bezugssysteme.
- Treten in einem System Beschleunigungen auf, kann nicht unterschieden werden, ob sie von einem Schwerfeld oder von der Beschleunigung des Bezugssystems verursacht werden.

### 2.1.2 Gekrümmte Räume

Kehren wir zu unserer Ausgangsfrage zurück. Sind nun in beschleunigten Systemen die Naturgesetze anders? Auf den ersten Anblick ist dies wohl der Fall. Ein Lichtstrahl zum Beispiel nimmt nicht wie dies die Elektrodynamik sagt, den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten. Jedenfalls nicht, wenn wir weiterhin in einem rechtwinkligen Koordinatensystem unsere Messungen machen. Was setzt aber fest, dass wir ein rechtwinkligen (euklidisches) Koordinatensystem verwenden sollen? Wenn wir nämlich unsere Koordinatenachsen krümmen können wir erreichen, dass sich in unserem System das Licht auch auf dem kürzesten Weg zwischen zwei Punkten bewegt.

Die Vorstellung Raum und Zeit zu verkrümmen macht Schwierigkeiten. Wenn wir uns aber auf zwei Raumdimensionen beschränken sind gekrümmte Koordinatensysteme Alltag. Unsere Erdoberfläche ist gekrümmt.

Was heisst nun aber eigentlich *gekrümmt*, *gerade* und *eben*? Unter dem Begriff *gerade* versteht man mathematisch, wenn zwei Punkte über die kürzeste Strecke miteinander verbunden sind. Eine Fläche gilt als eben, wenn ein darauf konstruiertes Dreieck (kürzeste Verbindungen zwischen drei Punkten) die Winkelsumme  $180^\circ$  besitzt. Achtung, die Oberfläche eines Zylinders ist nach Definition keine gekrümmte sondern eine ebene Fläche. Ja, die Zylinderoberfläche lässt sich ja aus einem ebenen Blatt Papier basteln. Ander ist dies bei einer Kugeloberfläche. Eine Kugeloberfläche lässt sich aus einem ebenen Blatt Papier nicht bauen. Ebenso wenig kann man die Kugeloberfläche ohne sie zu dehnen zu einer Ebene ausbreiten. Dies ist der Grund warum man kein ebenes Abbild der Erdoberfläche machen kann ohne es zu verzerren. Verbindet man drei Punkte auf der Erde, so ist die Winkelsumme dieses Objektes immer grösser als  $180^\circ$ . Zieht man zum Beispiel zwei Geraden entlang zweier Meridianen in einem rechten Winkel zueinander vom Nordpol zum Äquator und verbindet dann die beiden Punkte am Äquator, so erhält man ein Dreieck mit der Winkelsumme  $270^\circ$ . Die Oberfläche einer Kugel ist also keine ebene Fläche sondern eine positiv gekrümmte Fläche.

Was ist nun eine gerade Linie auf dieser gekrümmten Fläche? Eine Gerade ist in der Mathematik als die kürzeste Verbindung zweier Punkte definiert. Wenn Sie die Flugroute eines Flugzeuges, das von Zürich nach New York fliegt, in einer Karte einzeichnen, stellen Sie erstaunt fest, dass das Flugzeug scheinbar einen grossen Bogen, weit über Grönland zieht, um endlich nach New York zu gelangen. Nun, dies ist der kürzeste Weg. Was muss man tun, wenn man die Route auf einer ebenen Landkarte mit einem Lineal (also als Gerade im euklidischen Sinne) darstellen will? Man muss das Bild der Kontinente verzerren. Bewegt man sich auf einer Kugeloberfläche von einem Punkt aus in zwei zueinander senkrechten Richtungen, so sind beide Wege nach innen (zum Kugelmittelpunkt) hin gekrümmt; in diesem Fall bezeichnet man die Krümmung als *positiv*. Eine ganz anders gekrümmte Fläche als die Kugeloberfläche ist diejenige eines Sattels. Zwei senkrecht zueinander laufende Wege sind auf der Sattelfläche entgegengesetzt gekrümmt; eine solche Krümmung ist *negativ* definiert. Auf ihr hat ein Dreieck eine Winkelsumme von weniger als  $180^\circ$ . Zwischen Sattel und Kugel steht die Ebene mit der Krümmung 0. Das Krümmungsvorzeichen  $k$  kennzeichnet den Typ der Krümmung.

Abbildung 2.3: Flächen mit konstanter Krümmung; Kugel mit konstanter positiver Krümmung, Ebene mit keiner Krümmung und Sattel mit konstanter negativer Krümmung

Die zweidimensionalen Räume der Figur 2.3 sind in die dritte Dimension hinein gekrümmt. Sie sind Modelle für die dreidimensionalen Räume der Kosmologie. Soweit diese in die vierte Dimension hinein gekrümmt sind, entziehen sie sich der Anschauung.

Tabelle 2.1: Kennzeichen der dreidimensionalen Räume der Kosmologie

<i>Raumkrümmung</i>	$k$	<i>Geometrie des Raumes</i>	<i>Volumen</i>
positiv	+1	elliptisch oder sphärisch	geschlossener Raum, endliches Volumen
null	0	flach (euklidisch)	offener Raum, kein endliches Volumen
negativ	-1	hyperbolisch	offener Raum kein endliches Volumen

Kehren wir zu unserem fliegenden Klassenzimmer zurück. Das Licht legt dort scheinbar eine gekrümmte Bahn zurück. Die Maxwell'schen Gleichungen sagen aber, dass das Licht immer den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten wählt, also eine Gerade beschreibt. Wollen wir dieses Gesetz in unserem beschleunigten System aufrecht erhalten, müssen wir von der euklidischen Geometrie weg kommen und annehmen, dass der Raum oder besser die Raumzeit gekrümmt ist, in dem Sinne wie wir das oben anhand der Ebene definiert haben.

Dies führt zur Interpretation, dass ein Gravitationsfeld, in welche, ja ein Lichtstrahl scheinbar eine Krümmung erfährt, in Tat und Wahrheit geradlinig verläuft, die Raumzeit in der er sich bewegt aber gekrümmt ist. Massive Körper verkrümmen also die Raumzeit.

### 2.1.3 Kosmologie und schwarze Löcher

Für die Ergründung des Universums und dessen Zukunft ist nun die zentrale Frage wie dieses, bzw. die Raumzeit, aus welcher es besteht geformt ist. Aus den Annahmen (kosmologisches Prinzip, vgl. [5]) die man heute über das Weltall trifft, folgen zwei wichtige Konsequenzen für die Metrik des Weltraumes:

1. Die Krümmung des Weltalls muss für einen bestimmten Zeitpunkt an jedem Ort des Raumes den selben Betrag haben. Diese Eigenschaft konstanter Krümmung haben unter allen möglichen dreidimensional gekrümmten Räumen nur die drei in Tabelle ?? zusammengestellten Typen der elliptischen, flachen und hyperbolischen Räume.
2. Der Abstand zweier Galaxien kann in der Form geschrieben werden:

$$\Delta r = R(t) \cdot \Delta l \quad (2.13)$$

wobei  $R(t)$  ein zeitabhängiges Krümmungsmass und  $\Delta l$  der Koordinatenabstand zweier Galaxien darstellt. Das bedeutet, dass im Weltall die Koordinaten der Galaxien gegeneinander nicht verändern, obwohl sie sich scheinbar auseinander bewegen. Es ist der Raum selber, der sich zeitlich verändert. Die ist zu vergleichen mit Punkten, die man an festen Positionen auf einen Luftballon gemalt hat. Bläst man den Luftballon auf, so sind die Punkte immer noch am selben Ort (Koordinate) auf dem Luftballon. Die Fläche auf welche sie gezeichnet wurden selber aber dehnt sich aus!

Die Aufgabe der Gravitationstheorie ist es nun die beiden Parameter Krümmungsmass  $R(t)$  und Krümmungsvorzeichen  $k$  zu bestimmen. Da in der einsteinschen Gravitationstheorie die Massen mit ihren Gravitationsfelder für die Krümmung des Raumes verantwortlich sind, ist die Verteilung der Masse und der Energie im Weltall bestimmend für die Art der Krümmung. Die Friedmann-Gleichungen beschreiben die Zusammenhänge zwischen Dichte des Weltalls, dem Krümmungsmass und dem Krümmungsvorzeichen. Ihre Lösung hängt im Wesentlichen von der Dichte des Weltalls ab und liefert folgende Möglichkeiten:

- $k = +1$   
Dies ist der Fall, wenn die das Weltall ausdehnende Beschleunigung kleiner ist, als die von der gesamten Masse erzeugten gravitativen Beschleunigung in entgegengesetzter Richtung. Der Raum ist dann sphärisch, sein Volumen endlich. Expansion und Kontraktion wechseln sich periodisch ab: die Expansion nach dem Urknall wird durch die Gravitation abgebremst und geht in eine Kontraktion über. Diese endet in einem sehr kleinen unvorstellbar dichten Gebilde, wo die Kontraktion durch die Gravitation durch den Strahlungsdruck gebremst und wieder in eine Expansion überführt wird.
- $k = 0$   
Der Raum ist flach und unendlich ausgedehnt, die Geometrie euklidisch. Die Expansion geht unbegrenzt weiter.
- $k = -1$   
Der Raum ist hyperbolisch gekrümmt und unendlich ausgedehnt. Die Expansion geht unbegrenzt weiter, weil die expandierende Beschleunigung grösser ist, als die gravitative.

Die beschriebenen Erkenntnisse über die möglichen Gestalten unseres Universums liessen den Schöpfer der Allgemeinen Relativitätstheorie erschrecken. Als Einstein 1915 seine Theorie präsentierte, deuteten noch keine Beobachtungen auf ein expandierendes oder sich zusammenziehendes Universum hin. Einstein führte daher in seinen Gleichungen die sogenannte „kosmologische Konstante“ ein, ein Term, der der Expansion (bzw. Kontraktion) des Universums entgegenwirkte. Er konnte also den Aussagen seiner Theorie nicht glauben. 1929 entdeckte Edwin Hubble die Expansion des Weltalls und Einstein konnte die kosmologische Konstante wieder abschaffen. Er nannte den kosmologischen Term später „die grösste Eselei meines Lebens“. Aber – ob mit oder ohne kosmologischer Konstante – der Umstand, dass Materie und Energie die Raumzeit veranlassen sich selbst zu krümmen, barg ein Problem, auch wenn dies nicht sofort erkannt wurde. Wenn Materie dicht genug ist kann sie gemäss den Einsteinschen Gleichungen einen Teil der Raumzeit derart stark abschnüren, dass er vom Rest des Universums abgetrennt wäre. Die Region würde zu einem *schwarzen Loch*! Die Raumzeit würde um ein derartiges Objekt so stark gekrümmt, dass Licht, welches in sein Einzugsgebiet gelangt, nicht mehr von ihm wegkommen könnte.

Die Idee vom schwarzen Loch ist aber viel älter als die Relativitätstheorie. Das Phänomen des schwarzen Lochs liegt schon in den Gravitationsgesetzen von Newton verborgen. Will man aus dem Gravitationsfeld eines Objektes entkommen erfordert dies die Energie

$$E = G \cdot m M \frac{1}{r} \quad (2.14)$$

wobei  $m$  die Masse des entfliehenden Körpers,  $M$  die Masse des Sterns,  $r$  den Radius des Sterns und  $G$  die Gravitationskonstante bezeichnet. Diese Gleichung folgt direkt aus der Gravitationsgleichung von Newton

$$F = G \cdot m M \frac{1}{r^2} \quad (2.15)$$

wobei hier  $r$  den Abstand zwischen den beiden Massen  $m$  und  $M$  bezeichnet. Überlegt man sich nun welche Beschleunigungsarbeit man verrichten muss, um die in Gleichung 2.14 angegebene Energie zu erhalten, so ist dies

$$\frac{mv^2}{2} = G \cdot m M \frac{1}{r}. \quad (2.16)$$

Die Geschwindigkeit auf welche man den Körper beschleunigen muss um ihn aus dem Gravitationsfeld zu befördern ist also

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (2.17)$$

Diese Geschwindigkeit ist offenbar unabhängig der Masse des Körpers der aus dem Gravitationsfeld fliehen will und nur von der Masse des Sterns  $M$  und dessen Radius  $r$  abhängig. Man nennt diese Geschwindigkeit die *Fluchtgeschwindigkeit*. Für die Erde beträgt diese Fluchtgeschwindigkeit 11.2 km /s. Man kann sich nun einen Stern denken, bei welchem das Verhältnis seiner Masse zu seinem Radius  $\frac{M}{r}$  so gross ist, dass die Fluchtgeschwindigkeit grösser als die Lichtgeschwindigkeit wird, kann natürlich nichts mehr diesem Ungetüm von Stern entkommen.

Bereits 1783 schrieb John Mitchell aus Cambridge in einem Aufsatz von Sternen, die das Licht zurückzuhalten vermögen und infolge dessen nicht sichtbar sind. Allerdings war ihm noch nicht bewusst, dass die Lichtgeschwindigkeit die schnellstmögliche Geschwindigkeit darstellt.

Die Raumzeit hat aber in einem schwarzen Loch eine Singularität (eine Polstelle). Wenn Licht in der Umgebung des schwarzen Lochs nicht „vom Fleck“ kommt, muss gemäss den Überlegungen der speziellen Relativitätstheorie die Zeit still stehen und der Raum unendlich verkürzt sein. Solch eine Singularität bildet das Ende von Raum und Zeit. Die Geschichte eines jeden Objektes, das in ein schwarzes Loch fällt, hört also dort auf. Um die philosophisch schwer zu deutende Sache der Singularität in der Raumzeit zu umgehen, führen neuste Theorien eine (philosophisch nicht weniger problematische) zweite Zeitdimension ein. Sie

nennen sie *imaginäre Zeit*. Die imaginäre Zeitachse steht senkrecht auf der reellen Zeitachse. Steht die Zeit auf der reellen Zeitachse still, heisst das nicht dass sie nicht in der imaginären Achse weiterläuft. Diese zweidimensionale Zeit bildet nun wieder eine Ebene, die zu einer Kugel gekrümmt werden kann. Diese Zeitebene hat dann weder Anfang noch Ende, sie ist wie die Erdoberfläche in sich geschlossen. Damit gibt es eine Singularität (ein Anfang oder ein Ende) der Zeit nur in der Projektion der komplexen Zeit in die reelle Ebene.

Dies tönt alles nach Science Fiction. Schwarze Löcher sind aber Gegenstand modernster Wissenschaft und man vermutet solche in unserer Galaxie. Theoretische Physiker wie etwa Stephen Hawking gehen noch einen Schritt weiter. Sie loten die mathematischen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie bis an ihre Grenzen aus und kombinieren Sie mit der Quantentheorie, in der Hoffnung eine allumfassende Theorie, „the theory of everything“ zu finden. Daraus resultieren teils phantastische Schlussfolgerungen. So stelle man sich zum Beispiel vor, die Raumzeit werde wie die Fläche eines Blatt Papiers so gekrümmt, dass zwei entfernte Bereiche nahe zusammen kommen. Über die dritte Dimension können wir nun über eine kurze Strecke (durch das Blatt hindurch) in einen weit entfernten Bereich in der anderen Ecke des Blattes gelangen. Stellen wir uns die Raumzeit ähnlich stark gekrümmt vor, so sollte dies auch eine Dimension höher funktionieren. Schwarze Löcher bilden möglicherweise den Eingang in solche „Wurmlöcher“, die in einem entfernten Bereich unseres Universums münden. Seit den Arbeiten Hawking's über schwarze Löcher, sind diese auch nicht mehr völlig „ausbruchsicher“. Die Unbestimmtheitsrelation der Quantentheorie lässt es zu, dass über sehr kurze Zeit ein Teilchen sich aus dem „Nichts“ Energie entlehnt, so dass es möglich ist, dass das Teilchen über kurze Zeit gar schneller als die Lichtgeschwindigkeit unterwegs ist und damit dem schwarzen Loch entfliehen kann. Geschieht die kontinuierlich wird das schwarze Loch immer leichter, verliert an Masse und „verdunstet“ schliesslich.

Solche Theorien liegen weit davon entfernt durch Beobachtungen bestätigt zu werden. Sie sind im Moment lediglich Folgen mathematischer Auslotung der Möglichkeiten, die die bestehenden Theorien bieten.

#### **2.1.4 Philosophische Bemerkungen**

Sowohl mit der Relativitätstheorie wie auch mit der Quantentheorie, die wir hier nicht besprochen haben, gelangen wir an die Grenzen unseres Vorstellungsvermögens. Es gibt allerdings auch das umgekehrte, nämlich, dass wir mit der Physik an Grenzen kommen, wo unser Vorstellungsvermögen nicht halt macht. Falls das

Universum im Urknall begonnen hatte, was war denn „vorher“? Uns was ist denn „ausserhalb“ des Universums? Fragen, die sofort auftauchen, wenn man über Kosmologie spricht. In unserem Kopf ist die Vorstellung verankert von der Welt, die sich vor dem Hintergrund von Raum und Zeit abspielt. Was, wenn dieser Hintergrund nicht unabhängig ist vom Weltgeschehen, selber sogar ein Anfang und ein Ende haben kann? Die Physik lässt sich nicht darüber aus. Wenn es Singularitäten in Raum und Zeit gibt, dann gibt es physikalisch kein „Vorher“ und kein „Ausserhalb“. Die Physik beschränkt sich auf Aussagen über Phänomene, die physikalisch messbar und beschreibbar sind. Alle anderen Phänomene existieren physikalisch nicht, was nicht heisst das sie nicht in einer anderen Betrachtungsweise der Welt existieren.

Noch deutlicher stellt sich die Frage über die Grenzen unserer physikalischen Wahrnehmung in der Quantentheorie. Im Laufe deren Entwicklung zeigte sich immer deutlicher, dass der physikalische Zustand eines Objektes nur bis zu einer Genauigkeit bestimmt werden kann, die naturgegeben ist. Diese Schranken treten immer bei der Messung zweier sogenannt komplementärer Grössen, wie zum Beispiel Ort und Impuls, zutage. Wird die Position eines Elektrons bestimmt, so wird dessen Bewegung durch die Messung gestört und verändert. Nun kann man behaupten, dass die Unmöglichkeit an einem Elektron Impuls und Ort gleichzeitig beliebig genau zu messen, mit der Unfähigkeit der physikalischen Methoden zu tun hat, nichts aber mit der Natur des Elektrons. Auch hier ist eine mögliche Haltung, dass wenn wir mit unseren Methoden keine Einsicht in die Zustände eines Systems haben, diese dann prinzipiell auch nicht definiert sind. Diese Philosophie bringt den Menschen mit seinen Sinnen und seiner Wahrnehmung ins Zentrum der physikalischen Theorien. Existiert nur das, was wir mit unseren Sinnen wahrnehmen können? Gibt es nur eine subjektive Welt und keine unabhängig vom Menschen existierende Welt? Wie sollten wir diese Frage entscheiden? Alle unsere Wahrnehmungen laufen über unsere Sinne. Damit stellt sich eine weitere Frage: Sind die physikalischen Theorien und Methoden, die wir Menschen entwickelt haben nichts anderes als ein Abbild der Funktionsweise unseres Denkens, unseres Geistes, unseres Bewusstseins? Da unser Denken, unser Bewusstsein und unsere Wahrnehmung aber den einzigen Zugang zur physikalischer Wirklichkeit bildet, macht es keinen Unterschied, ob diese Wirklichkeit eine Mensch unabhängige objektive oder eine rein subjektiv menschliche ist.

Einstein, obwohl er zu den Mitbegründer der Quantentheorie zählt, hatte seit jeher Mühe mit der philosophischen Interpretation der Theorie. Seine Haltung war, dass wenn über unsere Sinneserfahrungen voraussagen gemacht werden können, also z.B. dass wenn er nach einem Tag am selben Ort an den Himmelschau wo die Sonne am Vortag gestanden hat, er die Sonne wieder vorfinden werde, dass dann



eine gewisse Objektivität der Wirklichkeit geben müsse. Extreme Objektivisten gehen soweit zu sagen, dass wenn es irgendwo sonst im Universum intelligente Wesen gibt, die fähig sind über die Funktionsweise der Welt nachzudenken, dass diese Wesen genau die selben Theorien finden würden und dies sogar in ähnlicher Reihenfolge, wie wir dies gemacht haben. Wer aber sagt, dass diese Wesen mit den selben Sinnesorganen ausgestattet sind und die Natur nicht noch phänomenologische Erscheinungen zeigt, die mit unseren Sinnen nicht erfasst werden können. Die Physik ist eine in unserer westlichen Kultur entstandene äusserst erfolgreiche Beschreibungsweise der uns zugänglichen Naturphänomenen. Aus der Sicht der Physik ist aber die Thelepathie zum Beispiel nicht verständlich und die Physik sagt auch nichts darüber aus. Dies heisst aber nicht, dass es sie nicht gibt. Gibt es vielleicht Menschen, die noch andere Sinnesorgane ausgebildet haben als die uns zugänglichen und damit eine andere Kategorie von Naturphänomenen wahrnehmen und verwenden können? Immer wieder haben die Menschen geglaubt bald am Ende der Beschreibung der Natur angelangt zu sein. Vor dem Hintergrund der oben gestellten Fragen wird man wohl nie mit Sicherheit von einer endgültigen objektiven Theorie der Welt sprechen können. Es wird höchstens eine auf eine Kategorie von vom „normalen“ Menschen wahrgenommenen Naturphänomenen geschlossene Theorie geben, die aber nicht ausschliessen kann, dass wenn es eine objektive Welt gibt, wir Menschen diese mit unseren Sinnen vollumfänglich erfassen. Also kann es abschliessend nicht das Ziel sein, die objektive Wirklichkeit vollumfänglich zu beschreiben, sondern die dem Menschen zugängliche Wirklichkeit. Alles was mit physikalischen Methoden nicht zu erfassen ist, ist demnach physikalisch nicht existent und man kan darüber auch keine physikalische Aussage machen.

# Literaturverzeichnis

- [1] Dreyer H.P., Appenzeller G., Handschin E., Klauser S., Mann W., Mohr M., Rudinger D., Schenkel H., *Aspekte der Realität in Physikaufgaben - Phänomene*, 1999
- [2] Einstein A., *Aus meinen späten Jahren*, 1953
- [3] Feynman R., Leighton R., Sands M., *Vorlesungen über Physik; Band 1: Mechanik, Strahlung, Wärme*, 1997
- [4] Gamov G., *Mr. Tompkins' seltsame Reise durch Komos und Mikrokosmos*, 1980
- [5] Gondolatsch F., Steinacker S., Zimmermann O., *Astronomie, Naturwissenschaftliche Reihe*, Klett-Verlag, 1996
- [6] Gribbin J., *Unsere Sonne - ein rätselhafter Stern*, 1992
- [7] Hawking St., *Eine kurze geschichte der Zeit*, 1988
- [8] Kropff A., *Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie*, 1921

# Anhang A

## Lösungen und Berechnungen

### A.1 Konstruktion der Relativität der Gleichzeitigkeit

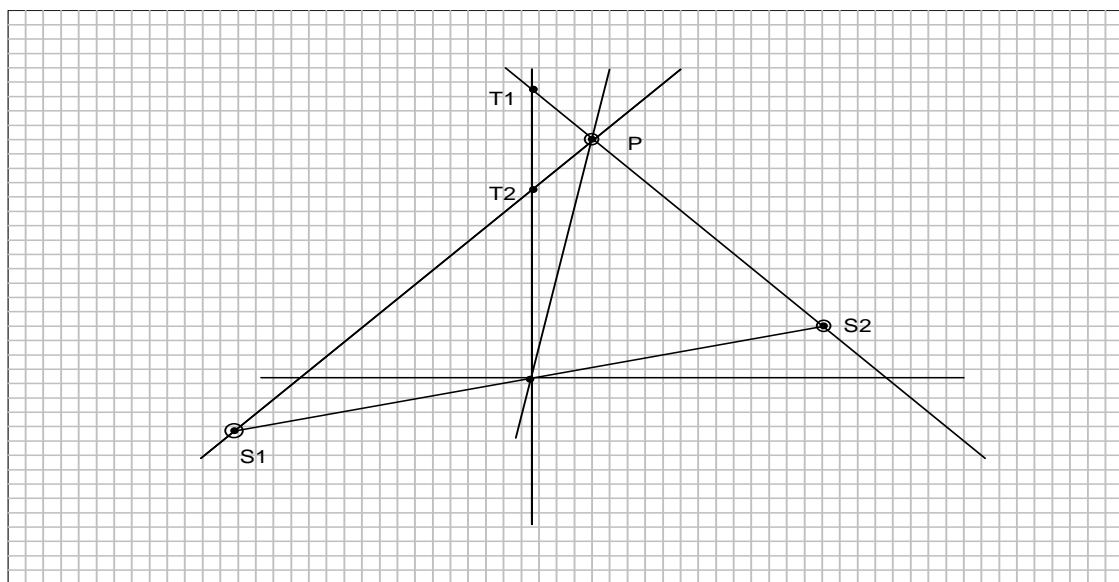


Abbildung A.1: Die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse hängt vom Bezugssystem ab!

## A.2 Herleitung der Lorentztransformation

In jedem Inertialsystem gilt die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

und wenn wir den Ortsraum auf eine Dimension reduzieren zu

$$x_1^2 - x_4^2 = 0 \quad (\text{A.2})$$

Wir ziehen die Wurzel aus dieser Gleichung und erhalten zwei Lösungen:

$$x_1 - x_4 = 0, \quad x_1 + x_4 = 0 \quad (\text{A.3})$$

Die erste Gleichung beschreibt einen Lichtstrahl, der nach rechts läuft, die andere einen, der nach links läuft. Dasselbe können wir für ein gegen das erste relativ bewegte System tun und bezeichnen diese Koordinaten mit  $x'_i$ .

$$x'_1 - x'_4 = 0, \quad x'_1 + x'_4 = 0 \quad (\text{A.4})$$

Wir setzen die Gleichungen der beiden Systeme in Beziehung zueinander:

$$(x_1 - x_4) = \lambda(x'_1 - x'_4), \quad (x_1 + x_4) = \mu(x'_1 + x'_4) \quad (\text{A.5})$$

Wir lösen die Gleichungen nach  $x'_1$  auf.

$$x'_1 = \lambda(x_1 - x_4) + x'_4, \quad x'_1 = \mu(x_1 + x_4) - x'_4 \quad (\text{A.6})$$

Wir setzen die beiden Gleichungen einander gleich und lösen gleichzeitig nach  $x'_4$  auf.

$$\begin{aligned} x'_4 &= \frac{\mu x_1}{2} + \frac{\mu x_4}{2} - \frac{\lambda x_1}{2} + \frac{\lambda x_4}{2} \\ &= \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)x_4 - \left(\frac{\lambda - \mu}{2}\right)x_1 \\ &= ax_4 - bx_1 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

wobei  $a = \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)$  und  $b = \left(\frac{\lambda - \mu}{2}\right)$ .

Analog können wir nach  $x'_1$  auflösen und erhalten zusammengefasst

$$x'_1 = ax_1 - bx_4, \quad x'_4 = ax_4 - bx_1 \quad (\text{A.8})$$

Sind  $a$  und  $b$  bekannt, dann sind die Transformationsgleichungen, welche die Gleichungen A.3 in das gestrichene System überführen, gefunden.

Für das Finden von  $a$  und  $b$  betrachten wir zuerst den Koordinatenursprung des gestrichenen Systems  $S'$ . Dort ist  $x'_1 = 0$  und daher

$$x_1 = \frac{a}{b}x_4 \quad (\text{A.9})$$

Ist  $v$  die Geschwindigkeit von  $S'$  gegen  $S$ , so ist aber

$$x_1 = vt = \frac{vct}{c} = \frac{v}{c}x_4 \quad (\text{A.10})$$

und damit

$$\frac{b}{a} = \frac{v}{c} \quad (\text{A.11})$$

Wir lassen für einen Moment die Zeit stillstehen, setzen  $x_4 = 0$  und vergleichen die Ortsmessungen in den beiden Systemen, indem wir einen Einheitsmassstab einmal in  $S'$  ruhend annehmen ( $x'_1 = 1$ ) und ihn aus  $S$  betrachten und dann umgekehrt ( $x_1 = 0$ ). Wir erhalten dann aus Gleichung A.8

$$x'_1 = ax_1 \quad (\text{A.12})$$

und mit  $x'_1 = 1$  die Abmessung des Einheitsmassstabes aus  $S$

$$\Delta x_1 = \frac{1}{a} \quad (\text{A.13})$$

Um dieselbe Betrachtung umgekehrt zu machen, eliminieren wir aus den beiden Gleichungen  $x_4$ , indem wir beide nach  $x_4$  auflösen und die Gleichungen dann gleichsetzen. Ebenfalls setzen wir  $x'_4 = 0$ :

Aus

$$x'_1 = ax_1 - bx_4, \quad x'_4 = ax_4 - bx_1 \quad (\text{A.14})$$

folgt

$$x_4 = \frac{ax_1 - x'_1}{b}, \quad x_4 = \frac{bx_1}{a} \quad (\text{A.15})$$

und durch Gleichsetzen

$$a^2 x_1 - a x'_1 = b^2 x_1 \quad (\text{A.16})$$

Wir lösen nach  $x'_1$  auf und erhalten

$$x'_1 = \frac{a^2 x_1 - b^2 x_1}{a} = \frac{x_1(a^2 - b^2)}{a} \quad (\text{A.17})$$

Wir setzen nach Gleichung A.11  $b = a \frac{v}{c}$

$$x'_1 = \frac{x_1(a^2 - a^2 v^2/c^2)}{a} = x_1 a (1 - v/c) \quad (\text{A.18})$$

Jetzt setzen wir hier  $x_1 = 1$  und erhalten die Abmessung des Einheitsmassstabes in  $S$  aus  $S'$

$$\Delta x'_1 = a(1 - v/c) \quad (\text{A.19})$$

Da  $\Delta x'_1$  und  $\Delta x_1$  gemäss den Voraussetzungen der Relativitätstheorie gleich sein müssen, folgt für  $a$  aus den Gleichungen A.13 und A.19

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{A.20})$$

Wenn wir  $a$  in Gleichung A.8 einsetzen und gemäss Gleichung A.11  $b = av/c$  setzen, erhalten wir die Gleichungen der Lorentz-Transformation:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{und} \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{A.21})$$

### A.3 Herleitung des relativistischen Energiesatzes

Für den relativistischen Impuls haben wir folgende Formel:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{A.22})$$

und für die totale Energie gilt

$$E = E_{kin} + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{1 - v^2/c^2} \quad (\text{A.23})$$

Zuerst quadrieren wir die Gleichung für den Impuls

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2} \quad (\text{A.24})$$

Dann lösen wir die Gleichung in zwei Schritten nach  $v^2/c^2$  auf. Zuerst erhalten wir

$$v^2 = \frac{p^2 c^2}{m_0^2 c^2 + p^2} \quad (\text{A.25})$$

und dann

$$v^2/c^2 = \frac{p^2}{m_0^2 c^2 + p^2} \quad (\text{A.26})$$

Diesen Ausdruck setzen wir in der Gleichung für die Energie anstelle von  $v^2/c^2$  ein und erhalten

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{m_0^2 c^2 + p^2}}} \quad (\text{A.27})$$

Wir quadrieren

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{p^2}{m_0^2 c^2 + p^2}} \\ &= \frac{m_0^2 c^4 (m_0^2 c^2 + p^2)}{(m_0^2 c^2 + p^2) - p^2} \\ &= \frac{m_0^4 c^6}{m_0^2 c^2} + \frac{m_0^2 c^4 p^2}{m_0^2 c^2} \\ &= m_0^2 c^4 + c^2 p^2 \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

und schliesslich

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} \quad (\text{A.29})$$

## A.4 Lösungen

### A.4.1 Kapitel 1.2.1

1. Vgl. Text Kapitel 1.2.1
2. Die Erde rotiert sowohl um die Sonne, wie auch um sich selber. Eine Rotation ist eine beschleunigte Bewegung. Beschleunigte Bezugssysteme sind keine Inertialsysteme! Auf der Erde treten Phänomene auf, die durch Scheinkräfte zustande kommen, so zum Beispiel die Abplattung der Erde an den Polen oder die starken West-Ost-Höhenwinde (Jetstreams) die durch die Korioliskraft erzeugt werden.

### A.4.2 Kapitel 1.3

1. –
2. –
3.
  - Schallmauer → Lichtmauer
  - Durchbrechen der Schallmauer (Überschallknall) → Lichtblitz, man eilt dann seinem eigenen Bild voraus. Man kann zurückschauen und seine Vergangenheit sehen

### A.4.3 Kapitel 1.4

1. (a)

$$t = \frac{h}{v_\mu} = 50 \mu\text{s} \quad (\text{A.30})$$

- (b)

$$T'_{\frac{1}{2}} = T_{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 19.4 \mu\text{s} \quad (\text{A.31})$$

Die halbwertszeit der  $\mu$ -Mesonen „von aussen“ betrachtet beträgt  $19.4 \mu\text{s}$ . Nach  $50 \mu\text{s}$  hat es also noch 16% nicht zerfallene  $\mu$ -Mesonen.

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T'_{\frac{1}{2}}}} = 0.16 = 16\% \quad (\text{A.32})$$



2. (a)

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{A.33})$$

„Die Abmessung einer Distanz in einem mit  $v$  bewegten System erscheint gegenüber der Abmessung im System ruhend zur zu messenden Distanz  $\Delta x$  um den Faktor  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  verkürzt.“

(b)

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \Delta x \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = 499.99999999998 \text{ m} \quad (\text{A.34})$$

Das bedeutet eine Verkürzung um 0.02 nm.

(c) Die Wellenlänge der gelben Natrium-Spektrallinie in Luft beträgt 589 nm, also etwa 30'000 mal mehr, als die Längenkontraktion.

(d) Thermische Verkürzung: Längenkontraktion:

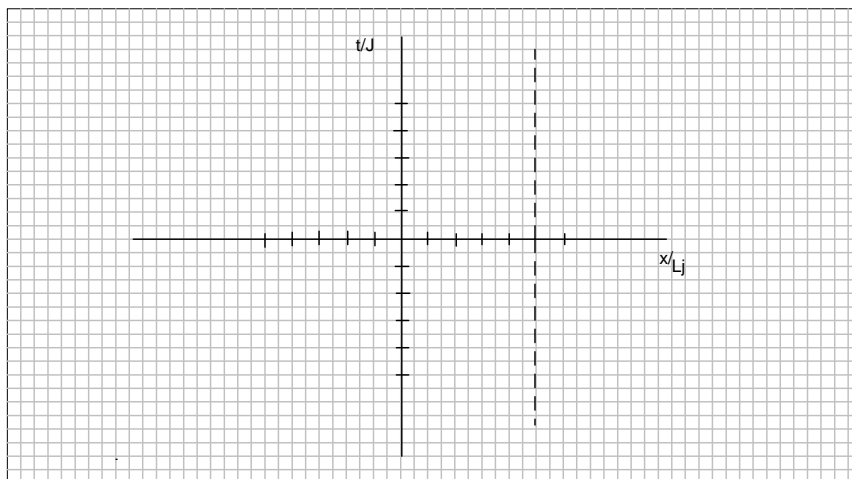
$$\Delta x' = \Delta x \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (\text{A.35}) \qquad \Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{A.36})$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

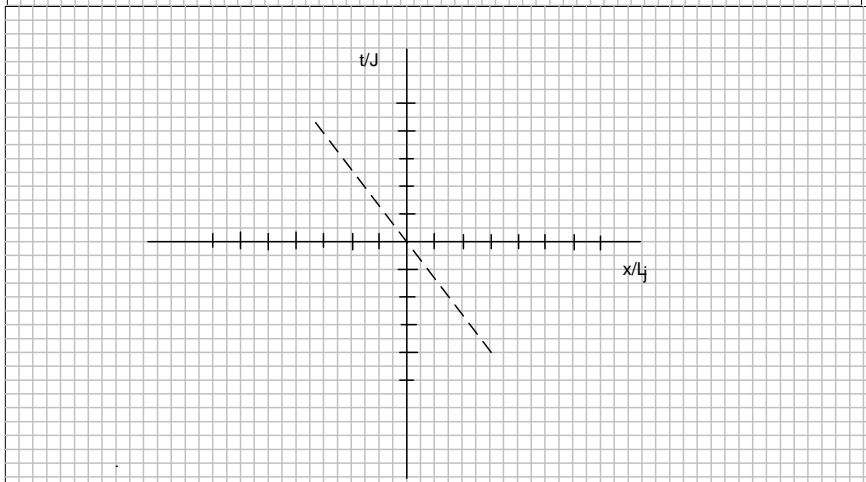
$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \alpha \cdot \Delta T &= \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \alpha^2 \cdot \Delta T^2 &= 1 - \frac{v^2}{c^2} \\ v &= \sqrt{c^2(1 - \alpha^2 \cdot \Delta T^2)} \quad (\text{A.37}) \\ v &= 299792457.9997 \text{ m/s} = 0.9999999999992 \cdot c \end{aligned}$$

### A.4.4 Kapitel 1.5.2

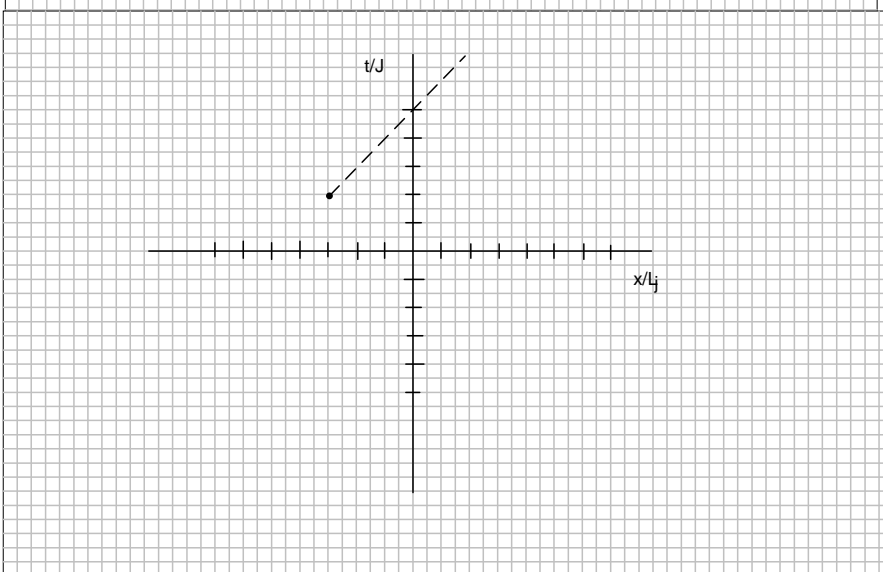
1. (a)



(b)



(c)



2. Zeitachse → Hier-Linie, auch *Weltlinie* genannt!  
Ortsachse → Jetzt-Linie
3. Um den Winkel  $\alpha = \arctan \frac{v}{c}$  geneigt.

### A.4.5 Kapitel 1.5.3

1. –
2. –
3. Ein Kegel
4. Wir können die vierte Koordinate, die Zeit nicht mehr darstellen. In einer Computersimulation wäre das eine Kugel, die sich zeitlich ausdehnt.
5. Das Entscheidungskriterium ist die Geschwindigkeit  $v$ , die ein Signal haben müsste, um vom einen zum anderen Ereignis zu gelangen. Ist die Geschwindigkeit grösser als  $c$ , dann kann keine Kausalität vorherrschen.

Ereignisse	$\Delta x$	$\Delta t$	$v$	$v/c$	Kausalität
$E_1 - E_2$	0.1 m	$1 \cdot 10^{-9}$ s	$1 \cdot 10^8$ m/s	0.33	JA
$E_1 - E_3$	0.2 m	$0.5 \cdot 10^{-9}$ s	$4 \cdot 10^8$ m/s	1.33	NEIN
$E_2 - E_3$	0.3 m	$0.5 \cdot 10^{-9}$ s	$6 \cdot 10^8$ m/s	2	NEIN

### A.4.6 Kapitel 1.7.1

1. (a)

$$\begin{aligned}
 v &= \omega \cdot r & (A.38) \\
 \frac{v}{\omega} &= r \\
 \frac{2c}{\pi} &= r = 190'985\text{km}
 \end{aligned}$$

- (b) Ja, die Bewegung des Lichtpunktes ist nichts Materielles, nichts, an was man eine Information knüpfen könnte.
- (c)
  - Schnittpunkt der beiden Scherenmesser einer sehr langen Schere.
  - Bewegung des Schattens

## A.4.7 Kapitel 1.7.2

1. (a) Die Gesamtenergie bestimmt die Massen der Teilchen, die erzeugt werden können

(b)

$$p = \frac{p_0}{\gamma} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2.5 \cdot 10^{-16} \frac{\text{kg m}}{\text{s}} \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 500 \quad (\text{A.40})$$

(c)

$$E_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 7.5 \cdot 10^{-8} \text{J} = 470 \text{GeV} \quad (\text{A.41})$$

(d)

$$p = qBr = 3.7 \cdot 10^{-15} \frac{\text{kg m}}{\text{s}} \quad (\text{A.42})$$

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 \approx p^2 c^2 \rightarrow E \approx pc = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{J} = 7.0 \text{TeV}$$

2. (a) Die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius der Distanz Sonne - Erde beträgt:

$$A = 4\pi R^2 = 2.81 \cdot 10^{23} \text{m}^2 \quad (\text{A.43})$$

Wenn die Leistung bei uns pro  $\text{m}^2$  1.4 kW beträgt, so macht das auf die oben berechnete Kugeloberfläche aufsummiert:

$$P = A \cdot S_0 = 4\pi R^2 \cdot S_0 = 3.9 \cdot 10^{23} \text{kW} \quad (\text{A.44})$$

(b)

$$E = mc^2 \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\Delta m}{t} = \frac{E}{t \cdot c^2} = \frac{P}{c^2} = 4'375 \text{ Tonnen / s}$$

- (c) Verlorene Masse durch Energieabgabe seit bestehen der Sonne (Annahme: Die Leistung der Sonne ist seit ihrem Existieren konstant):

$$\Delta m = \frac{\Delta m}{t} \cdot t = 6.9 \cdot 10^{23} \text{kg} \quad (\text{A.46})$$

Das ist etwa 0.000034% der Sonnenmasse.

3.

$$E_{kin} = qU = 20\text{keV} = 3.2 \cdot 10^{-15}\text{J} \quad (\text{A.47})$$

$$E_{tot} = E_{kin} + E_0 = qU + m_0c^2 = 8.5 \cdot 10^{-14}\text{J} \quad (\text{A.48})$$

$$p^2c^2 = E_{tot}^2 - E_0^2 \rightarrow p = \sqrt{\frac{E_{tot}^2 - E_0^2}{c^2}} \quad (\text{A.49})$$

$$= 7.7 \cdot 10^{-23} \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{1}{c^2}}} \quad (\text{A.50})$$

$$= 8.1 \cdot 10^7 \text{m/s, wirkliche Geschwindigkeit}$$

$$E_{kin} = qU = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad (\text{A.51})$$

$$= 8.4 \cdot 10^7 \text{m/s; 4% zu hoch}$$

$$(\text{A.52})$$

# Anhang B

## Texte

### B.1 Kapitel 1 aus *Unsere Sonne* von J. Gribbin [6]