Das Prinzip der kleinsten Wirkung (frei nach R.P. Feynman)

(Diese kurze Unterrichtssequenz ist grösstenteils dem Kapitel „Das Prinzip der kleinsten Wirkung“ aus „Lectures of Faynman, Band II“ abgeschrieben. Einiges wurde etwas ausführlicher erläutert um für die gymnasiale Stufe verständlich zu machen.)

Nach welchen Kriterien gestaltet sich die Bewegung eines Körpers?

In der Mechanik haben wir die Newton’schen Kraftgesetze und dabei auch das Fallgesetz kennengelernt. Die Newton’schen Mechanik baut auf einer *differenziellen Betrachtung* von Ursache und Wirkung auf, was soviel heisst, wie dass zu jedem Zeitpunkt gefragt wird: „. . . und wie geht’s weiter?“. Die Antwort gibt die Kraft, die in jedem Moment die Bewegung steuert.

Eine ganz andere Betrachtungsweise ist der Ansatz der Lagrange’schen Mechanik, welche das Geschehen in *integraler Form* beschreibt. Sie macht eine Aussage darüber, wie die Natur sich, den ganzen Prozess überblickend, verhält. Nach der Theorie von Lagrange verhält sich die Natur immer so, dass die mittlere Differenz von kinetischer Energie minus dem Potential (z.B. die potentielle Energie), über einen bestimmten Prozess gemittelt, minimal ist.

$$S = \int_{t_A}^{t_B} (E_{kin}(t) - V(t))dt = \min. \tag{1}$$

S wird *die Wirkung* genannt. S ist eine Funktion von Funktionen, hier $S(F(t))$, wobei $F(t) = (E_{kin}(t) - V(t))$. In mathematischer Sprache nennt so etwas ein *Funktional*.

Diesem *Prinzip der kleinsten Wirkung* folgt die Natur offenbar bei *allen* physikalischen Prozessen. Aus diesem Prinzip können die Bewegungsgleichungen eines Systems abgeleitet werde. Dies geschieht mit der Variationsrechnung, auf die wir hier kurz eingehen wollen.

Variationsprobleme

Bereits im Altertum taucht in der Legende um die Gründung der Stadt Karthago eine Aufgabe auf, die als Variationsproblem angesehen werden kann: Gemäss der Legende sollte die Stadt genau soviel Land erhalten, wie die Fläche, welche die Furche eines Pflügers mit seinem Pflug in einem Tag zu umschliessen vermag. Die Frage stellt sich natürlich, welchen Weg der Pflüger mit seinem Pflug einschlagen soll. Man nennt so etwas eine *isoperimetrische Aufgabe*.

Im Jahr 1696 stellte Johann Bernoulli, ein Sproß der berühmtesten Schweizer Gelehrtenfamilie, der Welt ein scheinbar leicht zu lösendes Problem:

„Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn zuweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt.“

Oder in etwas modernerem Deutsch: Auf welcher Bahn muss eine Kugel im Schwerefeld der Erde laufen um in möglichst kurzer Zeit von A nach B zu gelangen (vgl. Figur 1)?

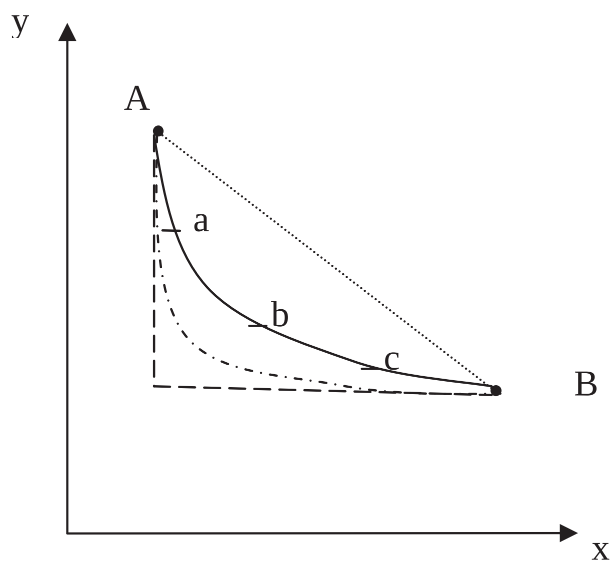

Abbildung 1:

Das Problem besteht darin, eine optimale Bahn von möglichst kurzer Länge bei möglichst grosser Beschleunigung zu finden.

Wenn die Kugel auf der kürzesten Verbindung zwischen A und B läuft (gepunktete Linie in Figur 1), dann beträgt ihre Beschleunigung $a = g \cdot \frac{y}{s}$ oder mit $s = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$a = g \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2}$$

Die Zeit um die Strecke s zurückzulegen, beträgt daher:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g \cdot \frac{y}{s}}} = \sqrt{\frac{2s^2}{g \cdot y}} = \frac{2s}{\sqrt{2yg}} \tag{3}$$

Nimmt die Kugel aber den Weg der gestrichelten Linie (vgl. Figur 1, wobei die Linie wirklich bis unten senkrecht verlaufen soll und dann waagerecht zum Punkt B), dann wird sie natürlich mit g beschleunigt, dies allerdings nur auf dem senkrechten Teil ihrer Bahn. Ihre Zeit beträgt:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2y}{g}} + \frac{x}{v_x} \tag{4}$$

und mit $v_x = g \cdot t_y = g \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{2yg}$:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2y}{g}} + \frac{x}{\sqrt{2yg}} = \frac{2y+x}{\sqrt{2yg}} \tag{5}$$

Damit ist die „Knickbahn“ schneller, falls:

$$\begin{aligned} 2s &> 2y + x \\ s^2 &> (y + \frac{x}{2})^2 \\ x^2 + y^2 &> (y + \frac{x}{2})^2 \end{aligned} \tag{6}$$

und damit

$$x > \frac{4}{3}y. \tag{7}$$

Sonst ist die schiefe Bahn schneller. Beide Bahnen scheinen also nicht optimal zu sein.

Um die schnellste Bahn zu erhalten ist die Variationsrechnung nötig, die wir für diesen Fall hier nicht durchführen wollen. Die Lösung sei trotzdem gegeben. Die schnellste Bahn ist nicht (wie Galilei behauptet hat) die Kreisbahn, sondern ein Zykloidenbogen. Diesen kann man graphisch erhalten, indem man einen Punkt auf einem Rad markiert, das entlang einer Geraden abrollt.

Bei diesem Beispiel tauchen noch zwei weitere Überraschungen auf:

- Die Kugel braucht auf der Zykloide immer gleich viel Zeit um nach B zu gelangen, egal von woher sie losgelassen wird, ob von ganz oben, von Punkt a, b oder c in Figur 1. Dies hat erstmals Christiaan Huygens bewiesen.
- Diese Lösung des Zykloidbogens bleibt auch dann die beste, wenn das Verhältnis y/x ungünstiger ist. Der Zykloidenbogen wird fortgesetzt, bis er für $y = 0$ vollständig durchlaufen wird. Damit liegt der tiefste Punkt der Bahn unterhalb von B. Durch den intuitiv nicht nachzuvollziehenden „Gang durch den Keller“(vgl. Fig. 2) ergibt sich der nötige Geschwindigkeitszuwachs.

Freie Bewegung einer Kugel

Kehren wir zurück zu unserer anfänglichen Frage nach der Bewegung einer Kugel. Wir wollen nun anhand eines ganz einfachen Beispiels sehen, dass das Prinzip der kleinsten Wirkung zur

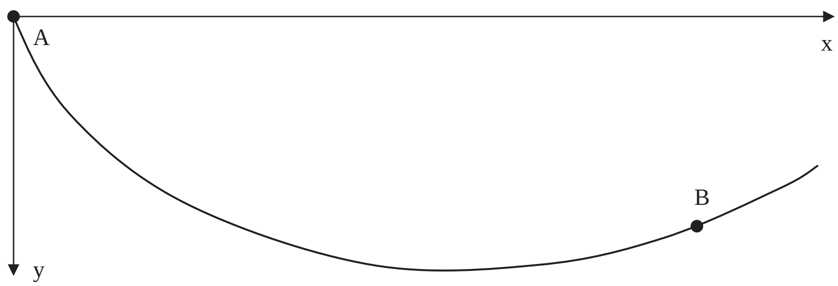

Abbildung 2:

richtigen Bewegung führt. Wir nehmen vorerst an, eine Kugel bewege sich in einem gravitationsfreien Raum. (Es gibt also kein Potential.)

Wir fragen nach der Bewegung einer Kugel, in diesem Fall im Zeitintervall t_1–t_2. Die Wirkung ist also gegeben durch:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin}(t) - 0)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m\dot{x}(t)}{2} - 0 \right) dt = \min. \tag{8}$$

Die mittlere kinetische Energie bleibt am kleinsten, wenn $\dot{x}$ konstant bleibt, denn sobald $\dot{x}$ vom Mittelwert $\langle \dot{x} \rangle$ abweicht, nimmt die totale kinetische Energie zu. Denn die positive Abweichung von $\langle \dot{x} \rangle$ im Quadrat fällt stärker ins Gewicht, als die negative. Bsp: $\langle \dot{x} \rangle = 4$, $\dot{x}_1 = 5$, $\dot{x}_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1^2 - \langle \dot{x} \rangle^2 = +9$ aber $\dot{x}_2^2 - \langle \dot{x} \rangle^2 = -7$.

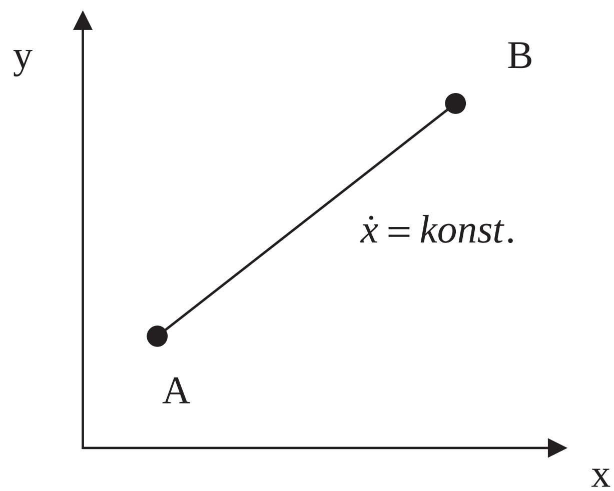

Abbildung 3:

Es ergibt sich eine geradlinig gleichförmige Bewegung (vgl. Figur 3)!

0.0.1 Bewegung einer Kugel im Gravitationsfeld

Nehmen wir nun an, wir befinden uns im Gravitationsfeld der Erde auf der Erdoberfläche und werfen die Kugel senkrecht nach oben. Das Potential ist nun nicht mehr Null sondern gegeben durch die potentielle Energie $V(x(t)) = mgx(t)$! Die Wirkung heisst jetzt:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin}(t) - V(x(t)))dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m\dot{x}(t)}{2} - V(x(t) \right) dt \tag{9}$$

Die Kugel fliegt zuerst schnell und wird dann immer langsamer. Die Kugel muss so schnell wie möglich zur hohen potentiellen Energie, damit $(E_{kin}(t) - V(x(t)))$ möglichst klein wird, dies aber doch nicht allzu schnell, damit E_{kin} am Anfang nicht zu gross wird! Die Natur sucht ein Optimum, um möglichst lange bei möglichst hoher potentieller Energie zu sein und dies bei möglichst kurzer Verweilzeit bei hoher kinetischer Energie! Die Kugel kann daher auch nicht in allzu grosse Höhen steigen, auch wenn dies ein stark negativer Beitrag in $(E_{kin}(t) - V(x(t)))$ geben würde, aber dies würde wiederum ein grosser Anfangswert für E_{kin} voraussetzen, was kontraproduktiv wäre.

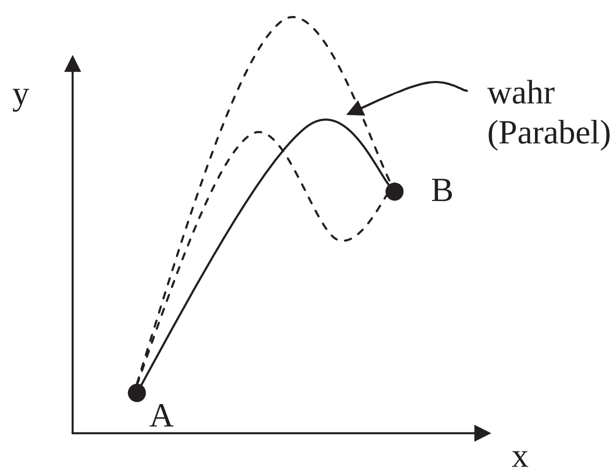

Abbildung 4:

Wir wollen nun dieses Problem mit Hilfe der Variationsrechnnung quantitativ lösen:

Dazu gehen wir davon aus, dass $\underline{x(t)}$ der gesuchte „richtige“ Weg zwischen zwei Punkten ist. Ein anderer beliebiger „Versuchsweg“ $x(t)$ unterscheidet sich von $\underline{x(t)}$ zu jedem Zeitpunkt durch einen kleinen Betrag $\eta(t)$.

Der Zusammenhang zwischen $\underline{x(t)}$ und $x(t)$ ist also

$$\underline{x(t)} = x(t) + \eta(t) \tag{10}$$

.

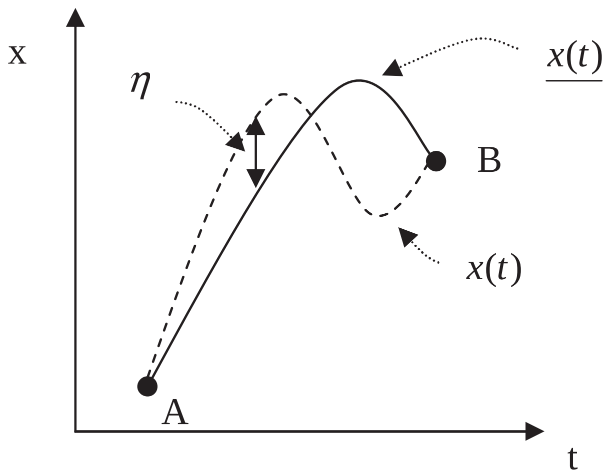

Abbildung 5:

Die Wirkung des wahren Weges $\underline{x(t)}$ nennen wir $\underline{S}$. Die Wirkung des Weges $x(t)$ heisst S. Ist $\underline{S}$ ein Minimum (was es ja sein soll), so verschwindet die Differenz $\underline{S} - S$ *in erster Näherung* in infinitesimaler Umgebung von $\underline{x(t)}$! Erst *in zweiter Ordnung* unterscheiden sich die Funktionale $\underline{S}$ und S.

Weiter ist vorgegeben, dass an den Endpunkten A und B die Funktionen $\underline{x(t)}$ und $x(t)$ zusammenfallen müssen, also $\eta(t_a) = \eta(t_b) = 0$ sein muss.

Wir formulieren vorerst die Wirkung S. Wir verwenden dabei folgende Zusammenhänge $x = \underline{x} + \eta$ und $\dot{x} = \dot{\underline{x}} + \dot{\eta}$:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2}(\dot{x})^2 - V(x)\right] dt && (11)\\
&= \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2}(\dot{\underline{x}} + \dot{\eta})^2 - V(\underline{x} + \eta)\right] dt && (12)\\
&= \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2}(\dot{\underline{x}}^2 + 2\dot{\underline{x}}\dot{\eta} + \dot{\eta}^2) - V(\underline{x} + \eta)\right] dt && (13)
\end{aligned}
$$

Das $\dot{\eta}^2$ ist eine kleine Änderung zweiter Ordnung und interessiert uns nicht, da wir letztlich fordern werden, dass eine kleine Änderung der Wirkung *in erster Ordnung* verschwinden soll. Wir lassen daher $\dot{\eta}^2$ weg!

$$
S = \int_{t_a}^{t_b} \left[(\frac{m}{2}\dot{\underline{x}}^2 + m\dot{\underline{x}}\dot{\eta}) - V(\underline{x} + \eta)\right] dt \qquad (14)
$$

Nun müssen wir uns überlegen, wie sich das Potential in erster Ordnung ändert. Wir verwenden dazu eine Technik, die in der Physik für die Annäherung einer Funktionen in einer bestimmten Umgebung sehr weit verbreitet ist, die Taylor-Entwicklung. Wir Entwickeln das Potential um $\underline{x}$.

$$V(\underline{x}+\eta) = V(\underline{x}) + \eta \cdot \frac{dV(\underline{x})}{d\eta} + \overbrace{\frac{\eta^2}{2} \cdot \frac{dV^2(\underline{x})}{d\eta^2} + \dots}^{\text{Therme hoeherer Ordnung}} \tag{15}$$

Wiederum lassen wir Therme höherer Ordnung weg. Damit ist

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2}\dot{\underline{x}}^2 + m\dot{\underline{x}}\dot{\eta} - V(\underline{x}) - \eta \cdot \frac{dV(\underline{x})}{d\eta}\right] dt & (16) \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left[(\frac{m}{2}\dot{\underline{x}}^2 - V(\underline{x})) + (m\dot{\underline{x}}\dot{\eta} - \eta \cdot \frac{dV(\underline{x})}{d\eta})\right] dt & (17) \\ S &= \underline{S} + \int_{t_a}^{t_b} \left[m\dot{\underline{x}}\dot{\eta} - \eta \cdot \frac{dV(\underline{x})}{d\eta}\right] dt = \underline{S} + \delta S & (18) \end{aligned}$$

δS nennt man *Variation der Wirkung*.

Dieses Integral gilt es nun zu lösen! Vorerst trennen wir die beiden Terme im Integral und versuchen sie einzeln zu lösen:

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \left[m\dot{\underline{x}}\dot{\eta} - \eta \cdot \frac{dV(\underline{x})}{d\eta}\right] dt = \int_{t_a}^{t_b} m\dot{\underline{x}}\dot{\eta}\, dt - \int_{t_a}^{t_b} \eta \cdot \frac{dV(\underline{x})}{d\eta}\, dt \tag{19}$$

Etwas unschön ist, dass wir im ersten Integral immer noch die zeitliche Ableitung von η haben. Um diese zu beseitigen integrieren wir das erste Integral partiell. Die *partielle Integration* ist das umgekehrte der Produkteregel beim Differenzieren:

$$(\eta f)' = \eta' f + f'\eta \tag{20}$$

oder

$$f\eta' = (\eta f)' - \eta f' \tag{21}$$

Integrieren wir auf beiden Seiten, erhalten wir die Formel für die partielle Integration. (Da wir nach der Zeit ableiten, schreiben wir weiterhin einen Punkt statt einen Strich auf den zu differenzierenden Grössen):

$$\int f\dot{\eta}\, dt = (\eta f) - \int \eta \dot{f}\, dt \tag{22}$$

Das f in unserer Rechnung ist $f = m\dot{\underline{x}}$. Das Integral 19 heisst damit:

$$\delta S = \eta m\dot{\underline{x}}|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \eta m\ddot{\underline{x}}\,dt - \int_{t_a}^{t_b} \eta \cdot \frac{dV(\underline{x})}{d\eta}\,dt \tag{23}$$

Der erste Teil lässt sich leicht auswerten, da an den Grenzen $\eta(t_a)$ und $\eta(t_b)$ jeweils Null ist, womit der ganze Therm Null wird:

$$\delta S = \underbrace{\eta m\dot{\underline{x}}|_{t_a}^{t_b}}_{=0} - \int_{t_a}^{t_b} \left(\eta m\ddot{\underline{x}} - \eta \cdot \frac{dV(\underline{x})}{d\eta}\right) dt \tag{24}$$

Damit bleibt:

$$\delta S = -\int_{t_a}^{t_b} (m\ddot{\underline{x}} + V(\underline{x})')\,\eta \quad dt \tag{25}$$

wobei $V(\underline{x})'$ einfach noch die Ortsableitung des Potentials ist.

Was wir hier haben ist also die Variation erster Ordnung des Funktionals S. Wenn das Funktional S minimal sein soll, muss die Variation erster Ordnung verschwinden. Da η nicht Null ist muss gelten:

$$(m\ddot{\underline{x}} + V(\underline{x})') = 0! \tag{26}$$

Wenn wir für das Potential die potentielle Energie mgx einsetzen folgt:

$$m\ddot{\underline{x}} = -V(\underline{x})' = -\frac{d(mgx)}{dx} = -mg \tag{27}$$

oder

$$\ddot{\underline{x}} = -g! \tag{28}$$

Daraus folgen durch Integrieren die bekannten Bewegungsgleichungen für die freie Bewegung im Schwerefeld.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g && (29)\\ \dot{x} &= -gt + \dot{x}_0 && (30)\\ x &= -\frac{gt^2}{2} + \dot{x}_0 t + x_0 && (31) \end{aligned}$$

Verallgemeinerung

Die Differenz aus kinetischer Energie und Potential $(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x))$ wird auch Lagrange–Funktion $\mathscr{L}$ genannt.

$$\mathscr{L} = (\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)) \tag{32}$$

Das Resultat der Variationsrechnung in unserem speziellen Fall oben (Gleichung 26) kann nun verallgemeinert und geschrieben werden als:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0 \tag{33}$$

Diese Gleichung wird *Euler–Lagrange–Gleichung* genannt.

Übungen

1. Vergewissern Sie sich, dass man durch Einsetzen der Lagrange–Funktion des Körpers im Schwerefeld in die Euler–Lagrange–Gleichung auf das Resultat 26 kommt.

2. Leiten sie die Bewegungsgleichung für ein Federpendel im gravitationsfreien Raum her, indem sie zuerst die Lagrange–Funktion $\mathscr{L}$ formulieren und diese dann in die Euler–Lagrange–Gleichung einsetzen.